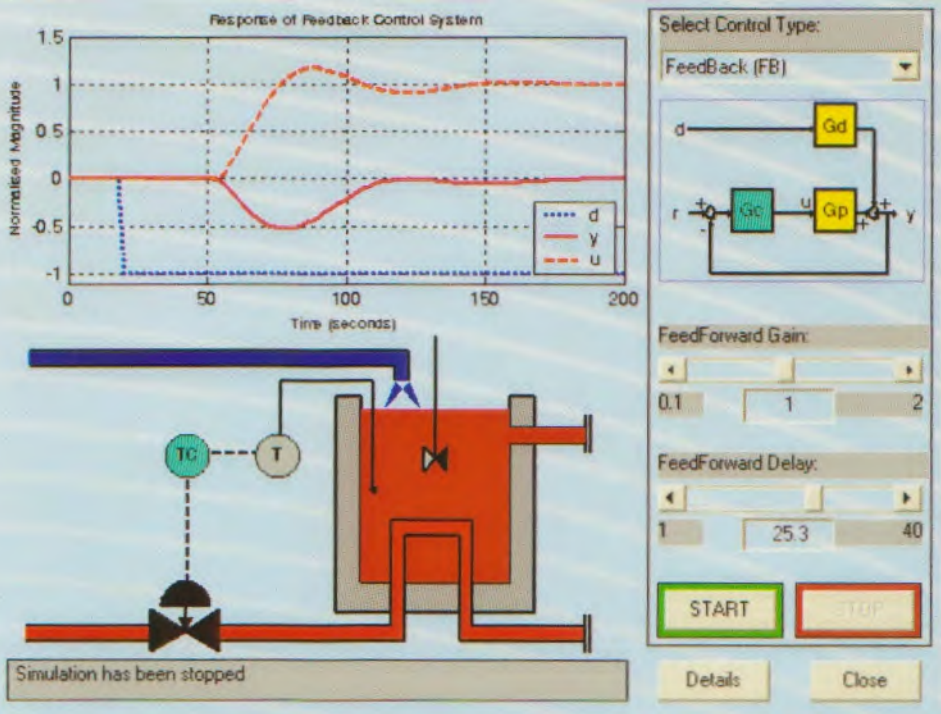
ALEXANDRU MARIN LUMINIȚA MARIN



DINAMICA SISTEMELOR MECANO-ELECTRO-HIDRAULICE ȘI MATERIALELOR VÂSCOELASTICE

Editura Printech
2005

ALEXANDRU MARIN LUMINIŢA MARIN

DINAMICA SISTEMELOR MECANO-ELECTRO-HIDRAULICE ŞI MATERIALELOR VÂSCOELASTICE

Alexandru MARIN **Luminița MARIN**

DINAMICA SISTEMELOR MECANO-ELECTRO-HIDRAULICE ȘI MATERIALELOR VÂSCOELASTICE

Coordonator
Conf. Dr. Ing. Alexandru MARIN

Editura PRINTECH
București, 2005

Copyright © Printech, 2005
Editura acreditată C.N.C.S.I.S.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Alexandru MARIN
Dinamica sistemelor mecano-electro-hidraulice şi materialelor vâscoelastice – Alexandru Marin, Luminița Marin
Bucureşti: Printech, 2005
p.; cm.
Bibliogr.

ISBN 973-718-405-X

Referenţi ştiinţifici:
Prof.dr.ing. Nicolae Vasiliu
Prof.dr.ing. Corneliu Bălan

TIPAR :
Editura PRINTECH (S.C. ANDOR TIPO S.R.L.)
Str.TUNARI nr.11 , sector 2 , BUCURESTI
Tel/Fax : 211.37.12

© Copyright 2005
Toate drepturile prezentei ediții sunt rezervate editurii si autorilor. Nici o parte din această lucrare nu poate fi reprodusă, stocată sau transmisă indiferent prin ce formă, fără acordul prealabil scris al autorilor.

PREFAŢĂ

Aşa cum se constată şi în viaţa cotidiană, în domeniile tehnico-ştiinţifice nu există o evoluţie monotonă, eventual liniară, a abordărilor educaţionale, de cercetare şi economice. Anii '50 erau caracterizaţi în învăţământul superior tehnic prin domenii de formare relativ largi, într-un sens oarecum similar spiritului ingineresc clasic-tradiţional. Perioada care a urmat şi care continuă până astăzi a fost caracterizată prin crearea unui mare număr de specializări şi/sau facultăţi, capitole din cărţi de specialitate devenind cursuri, predate unor formaţiuni de studiu restrânse, cu detalieri exagerate. Suma acestor cursuri reprezintă o cantitate enormă de informaţii, structurată eventual numai la nivelul unui singur curs, dar redundantă şi necorelată la nivelul întregului program de pregătire inginerească. În orice caz, nu se poate vorbi de o bază de cunoştinţe pe care studentul să şi-o poată forma, iar ideile de analogie-similitudine dintre diferite fenomene fizice, respectiv de cunoaştere multi-disciplinară lipsesc aproape cu desăvârşire.

În domeniul dinamicii sistemelor, cuprinzînd procese mecanice, electrice, fluidice, termice şi combinate, există o sistematizare unitară, la nivel teoretic, făcută de specialişti în automatică şi prea puţine abordări practice, dezvoltate în laboratoare didactice şi de cercetare din universităţi şi institute de cercetare-dezvoltare. Dominantă este abordarea pur mecanică, electrică, fluidică, termică, în total dezacord cu noile principii mecatronice, care pornesc de la constatarea practică că majoritatea sistemelor tehnice performante sunt mecano-electro-termo-fluidice. Materialele speciale reprezintă priorităţi tematice în programele de cercetare-dezvoltare internaţionale, comportamentul lor reologic fiind abordat insuficient, la noi în ţară, în programele de pregătire universitară, mai ales în contextul aplicaţiilor inginereşti, din domeniul tehnologiei electronice, sistemelor de acţionare, comandă şi control speciale etc.

Lucrarea de faţă îşi propune să contribuie la abordarea unitară a dinamicii sistemelor mecano-electro-fluidice şi identificării comportamentului reologic al lichidelor vâscoelastice, mai ales prin prisma aplicaţiilor rezolvate prezentate. În acest sens, autorii au beneficiat de buna colaborare cu Centrul de Cercetări Energetice şi Protecţia Mediului, din Facultatea de Energetică a Universităţii POLITEHNICA Bucureşti, condus de Prof. Dr. Ing. Nicolae Vasiliu, căruia i se aduc pe această cale sincere mulţumiri. În cadrul centrului de cercetări menţionat există o licenţă a pachetului de programe MATLAB-SIMULINK, cu ajutorul căruia au fost conduse toate experimentele de simulare numerică efectuate. Un sprijin însemnat a fost primit şi din partea Grupului REOROM, din Catedra de Hidraulică, Maşini Hidraulice şi Protecţia Mediului, din Facultatea de Energetică a Universităţii POLITEHNICA Bucureşti, condus de Prof. Dr. Ing. Corneliu Bălan, cu care încă din 1998 au fost demarate lucrări comune didactice şi de cercetare, în domeniul materialelor vâscoelastice.

Lucrarea se adresează tuturor celor care se confruntă cu necesitatea înţelegerii funcţionării sistemelor mecano-electro-fluidice, prin intermediul modelării şi simulării dinamicii acestor sisteme, având ca public ţintă studenţii din profil mecanic, electric şi energetic ai universităţilor tehnice, dar şi specialiştii domeniului mecatronic, care vor găsi în conţinutul acestei cărţi "abecedarul" unei abordări coerente a problemelor practice.

Ca orice material scris şi cartea de faţă reflectă punctul de vedere al autorilor faţă de problema abordată, unul probabil subiectiv, deci criticabil şi marcat de experienţa profesională a acestora. Un lucru este însă sigur şi anume acela că demersul autorilor este sincer şi provenit din constatările lor directe, în contact cu sistemul educaţional românesc şi cu mediul ingineresc, activ în domeniul economic din România. Pe această cale, autorii sunt recunoscători tuturor celor care vor face observaţii constructive, cel mai neplăcut lucru fiind acela ca această publicaţie să treacă "neobservată".

Bucureşti, decembrie, 2005

CUPRINS

I. DINAMICA SISTEMELOR MECANO-ELECTRO-HIDRAULICE

I.1. Dinamica sistemelor în inginerie şi în ştiinţă 1
I.2. Modelarea dinamicii sistemelor 3
I.2.1. Sisteme (elemente) pur mecanice 3
I.2.1.1. Elemente pur masice 3
I.2.1.2. Elemente pur elastice 6
I.2.1.3. Elemente pur disipative (de frecare) 11
I.2.2. Sisteme (elemente) pur electrice 13
I.2.2.1. Elemente pur capacitive 13
I.2.2.2. Elemente pur inductive 15
I.2.2.3. Elemente pur rezistive 18
I.2.2.4. Elemente pur transformatoare 19
I.2.2.5. Traductoare electromecanice 20
I.2.3. Clasif. variabile, sistematizare elemente pur mecanice şi electrice 22
I.2.4. Sisteme (elemente) pur fluidice 23
I.2.4.1. Elemente pur capacitive 24
I.2.4.2. Elemente pur inductive 28
I.2.4.3. Elemente pur rezistive 29
I.2.4.4. Elemente pur transformatoare 32
I.2.5. Cuplarea sistemelor mecanice şi fluidice 34
I.3. Generalizări privind dinamica sistemelor 35
I.3.1. Variabile generalizate. Putere şi energie 35
I.3.2. Elemente cu două terminale - unic flux energetic 36
I.3.2.1. Elemente pur inductive "în serie" – inductanţe generalizate .. 36
I.3.2.2. Elemente pur capacitive "în paralel" – condensatoare generalizate 37
I.3.2.3. Elemente pur "disipative" – rezistenţe generalizate 37
I.3.2.4. Elemente pur generatoare "în serie" şi "în paralel" – surse de energie 38
I.3.2.5. Schematizarea rezumativă a elementelor cu două terminale - unic flux energetic 38
I.3.3. Elemente cu patru terminale - dublu flux energetic 39
I.3.3.1. Elemente pur transformatoare 39
I.3.3.2. Elemente pur de tip „permutare" 41
I.3.3.3. Elemente pur traductoare 41
I.3.4. Elemente pur de control-modulare 41
I.3.5. Schematizare rezumativă a bilanţului energetic (de putere) pentru elemente tip de circuit 43
I.4. Modelarea dinamicii sistemelor 44
I.4.1. Formularea sistemului de ecuaţii al modelului 44
I.4.2. Condiţiile iniţiale specifice problemelor practice 47
I.4.3. Condiţii la limită în probleme practice - domenii de modelare 49
I.4.4. Modelarea sistemelor complexe 51
I.5. Sisteme analoage şi duale 52

I.6 Aplicaţii 57
I.6.1 Frecare între plăci plane cu mişcare paralelă relativă 57
I.6.2 Frecare între doi cilindri coaxiali 58
I.6.3 Sistem de amortizare cilindru tren aterizare aeronavă 59
I.6.4 Proprietăţi capacitive ale unei instalaţii din industria chimică 62
I.6.5 Variaţiile în timp ale debitului şi nivelului într-un rezervor deschis 63
I.6.6 Capacitatea hidraulică a unui rezervor perfect rigid 64
I.6.7 Capacitatea hidraulică a unui rezervor tronconic 65
I.6.8 Dimensionarea unui acumulator hidropneumatic 67
I.6.9 Conductă forţată turbină hidraulică 68
I.6.10 Inductanţă hidraulică tub orizontal tronconic 69
I.6.11 Curgere prin tub capilar – modelare element de circuit 71
I.6.12 Curgere în sistem hidraulic cu două rezervoare 71
I.6.13 Curgere în sistem hidraulic cu un rezervor şi conducte de legătură 74
I.6.14 Traductor de presiune cu linie transmitere semnal 77
I.6.15 Sistem hidraulic cu pompă şi două rezervoare 80
I.6.16 Sistem alimentare circuit hidraulic cu grup pompă-acumulator 83
I.6.17 Sistem de măsurare a presiunii în camera de ardere a unei rachete 84
I.6.18 Supapă de reglare a presiunii 86
I.6.19 Servodirecţie 90
I.6.20 Sistem acţionare cu cilindrii hidraulici 94
I.6.21 Servomecanism electrohidraulic – SMEH 101
I.6.22 Autovehicul 103
I.6.23 Ambreiaj auto 105
I.6.24 Suspensie auto 107
I.6.25 ABS auto 108

II. DETERMINAREA PROPRIETĂŢILOR FLUIDELOR-MATERIALELOR VÂSCOELASTICE

II.1. Introducere 111
II.2. Mecanismele fizico-chimice ale vâscoelasticităţii 111
II.3. Procedee de măsurare ale vâscoelasticităţii 112
II.3.1. Aspecte teoretice ale testelor de fluaj şi relaxare 114
II.3.2. Concluzii privind testele de fluaj şi relaxare 133

ANEXĂ

A.1 Semnale de comandă 135
A.1.1 Semnale treaptă 135
A.1.2 Semnale rampă 136
A.1.3 Semnale periodice 136
A.2 Funcţii de transfer 138
A.3 Caracteristicile (diagramele) Bode 139
A.4 Transformata Laplace 143

BIBLIOGRAFIE

I. DINAMICA SISTEMELOR MECANO-ELECTRO-HIDRAULICE

I.1. Dinamica sistemelor în inginerie şi în ştiinţă

Analiza dinamicii sistemelor este esenţială în multe domenii ale ingineriei şi în activitatea ştiinţifică şi economică. Se pot exemplifica:

- sisteme aerospaţiale: determinarea traiectoriilor, manipulare la distanţă, controlul ţinutei de zbor etc.;

- automatizări: producţie, controlul proceselor tehnologice etc.;

- biomedicină: controlul funcţiilor vitale, dinamica sistemelor vii, investigaţii clinice;

- sisteme economice: dinamica economiilor regionale, comportamentul sistemelor bancare etc.;

- comunicaţii: control la distanţă, transmisia informaţiei etc.;

- calculatoare şi sisteme de procesare a datelor: achiziţia şi memorarea datelor, conducerea cu calculatorul a proceselor complexe;

- sisteme militare de apărare: controlul rachetelor, sisteme de urmărire radar, stabilitate aerodinamică, sisteme speciale de tragere etc.;

- energetică şi sisteme de propulsie: centrale termo şi hidro electrice, controlul reactoarelor nucleare, magnetohidrodinamică etc.;

- psihologie: dinamica subiecţilor şi grupurilor de oameni, procese de învăţare etc.;

- structuri mecanice: dinamica clădirilor, proiectarea podurilor, structuri de aeronave etc.;

- sisteme de transport: aeronave şi sisteme de control trafic, sisteme de frânare, sisteme de direcţie asistată, controlul vitezelor de deplasare, stabilitatea plutirii navelor, sisteme de alimentare cu apă etc.

Această suită relativ lungă şi cuprinzătoare de aplicaţii subliniază caracterul practic universal al sistemelor în care se manifestă aspectele dinamice ale fenomenelor asociate.

Spre exemplificare, se analizează structurile constructiv-funcţionale ale unor sisteme reprezentative de producere a energiei electrice (fig. I.1).

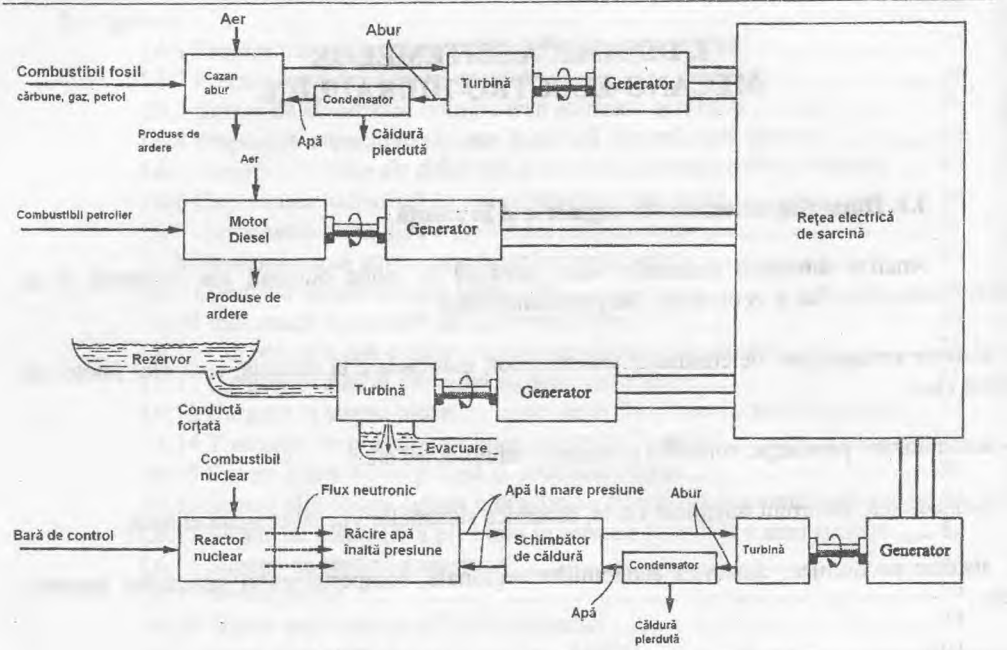


Fig. I.1 Structura constructiv-funcțională a unor sisteme de producere energie electrică

Toate sistemele prezentate au un grad de complexitate ridicat, în care aspectele dinamice pornesc chiar de la premiza că puterea electrică produsă se asociază cu o tensiune (curent) sinusoidală. Un astfel de sistem distribuie energie pe suprafețe de teren mari, la distanțe lungi, cu grupuri de producție multe şi o putere instalată de sute de MW. Sursele energetice sunt variate, de tip combustibil fosil, nuclear şi apă stocată în sisteme de acumulare. Fiecare dintre sistemele folosind aceste resurse este caracterizat de un set specific de caracteristici dinamice.

Într-un sistem funcționând cu combustibil fosil, prin arderea acestuia se produce abur într-un cazan, abur care apoi antrenează un turbo-generator (turbină cu abur şi generator electric). Pornirea sistemului implică constante de timp mari, înainte de cuplarea la sarcină şi în cazul modificărilor de putere produsă, în regim normal de funcționare. În general, sistemele termice nu pot prelua variații rapide de încărcare. Excepție fac sistemele acționate cu motoare Diesel, la nivele medii de putere, de obicei fiind folosite în paralel cu turbo-generatoarele clasice, pentru preluarea vârfurilor de sarcină (îmbunătățirea capacității de răspuns la variații mai rapide de sarcină).

Cele mai flexibile, din punct de vedere al preluării variațiilor de sarcină, sunt amenajările hidro-electrice, care au şi costuri de operare mai reduse. În condiții specifice, sistemele cu acumulare prin pompaj pot asigura intervenția grupurilor hidro-electrice numai în timpul vârfurilor de sarcină.

Dezvoltarea energeticii nucleare a condus la scăderea continuă a costurilor de investiție şi operare, mai ales în cazul grupurilor de mare şi foarte mare putere.

Dinamica acestor sisteme este influențată nu numai de variațiile de putere cerută de consumatori, dar şi de interconectarea pe rețelele de transmitere a energiei electrice produsă a diferitelor tipuri de generatoare. Un grup energetic, funcționând stabil pe o sarcină izolată,

poate crea probleme când este conectat la o rețea regională sau națională. Problema căderilor de sarcină în sisteme mari este una deosebit de complexă, având implicații strategice în siguranța de exploatare a rețelei în ansamblul său.

De ex. la o aruncare din sarcină a unui grup termo-energetic, sistemele de control a presiunii din cazan și a turației generatorului electric trebuie să intervină rapid, pentru a preveni explozia cazanului sau ambalarea generatorului. Un asemenea grup conține mai multe subsisteme automate, care controlează temperatura, presiunea, debitul de abur, turația, tensiunea și curentul electric etc., toate fiind caracterizate prin performanțele dinamice impuse (stabilitate, timp de răspuns).

I.2. Modelarea dinamicii sistemelor

Comportamentul sistemelor fizice reale, pe care specialiștii trebuie să le analizeze și proiecteze, este caracterizat de ex. în domeniul mecanic prin mișcare-deformație, variații de masă-volum și schimburi energetice. Complexitatea lor este ridicată, schimburile de energie putând implica suprapunerea efectelor create de câmpuri electromagnetice, fenomene termice, curgerea fluidelor sau reacții nucleare.

Analiza dinamicii sistemelor implică întotdeauna formularea unui model reprezentativ, alcătuit din elemente tip, caracterizate funcțional corespunzător. Cel mai bun model este acela care este cel mai simplu, dar care reușește să aducă toate informațiile inginerești necesare în analiza și sinteza sistemului căruia îi este asociat. Un răspuns aproximativ la o problemă inginerească vizează optimizarea raportului cost-precizie, pentru modelul folosit. Variante simplificate – idealizate sunt utile în activitățile de pre-dimensionare și analiză preliminară a performanțelor, fără a pierde din vedere elementele fundamentale din comportamentul real al sistemului studiat.

Modelele utilizează elemente simple, similare, care pot fi grupate pe patru mari categorii fizice: mecanice, electrice, fluidice și termice. Cele mai cunoscute din literatura de specialitate și care au făcut primele obiectul unor dezvoltări teoretice și practice cuprinzătoare sunt componentele electrice de circuit.

Similitudinile evidente, care fac și obiectul analizelor din lucrarea de față, permit abordarea unificată a studiului dinamicii sistemelor fizice reale. În cele ce urmează, vor fi descrise detaliat elementele mecanice și fluidice.

I.2.1. Sisteme (elemente) pur mecanice

În analiza sistemelor mecanice - într-un sens foarte restrictiv, fără a include aspectele fluidice și termice, care se manifestă în mod natural – este convenabil să grupăm elementele reprezentative pe trei categorii: mase, resoarte elastice și elemente disipative. În practică, majoritatea fenomenelor pur mecanice pot fi modelate prin combinații de asemenea elemente simple. Pe scurt, masele modelează caracteristici inerțiale, resoartele au capacitate de înmagazinare energie elastică de deformație, iar elementele disipative caracterizează fenomenele de frecare, care se manifestă în procese dinamice.

I.2.1.1. Elemente pur masice

Considerând o masă m care se mișcă în direcția x, cu accelerația absolută a_2, viteza absolută v_2 (fig. I.2.1).

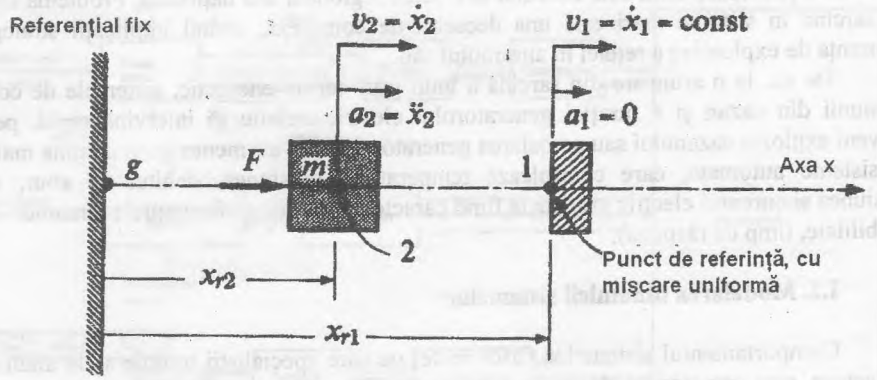


Fig. I.2.1 Schemă de calcul dinamica unei mase

Conform principiului II al dinamicii, forţa F care produce mişcarea se scrie:

$$F = ma_2 = m\frac{dv_2}{dt} = m\ddot{x}_2 \tag{I.2.1}$$

Dacă studiul se raportează la un punct de referinţă 1, aflat în mişcare uniformă, avem:

$$\begin{aligned} x_{21} &= x_2 - x_1 \\ v_{21} &= \dot{x}_{21} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ a_{21} &= \ddot{x}_{21} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{I.2.2}$$

Un mod echivalent de scriere al principiului II al dinamicii este:

$$p = mv_2 \tag{I.2.3}$$

unde: p este impulsul (cantitatea de mişcare).
În general, părţile unui corp nu sunt legate perfect rigid, putând avea mişcări diferite.

a) Pentru a putea analiza aspectele asociate mişcării, este separată conceptual translaţia masei, de celelalte fenomene asociate non-masice, de tipul frecare sau comportament elastic. Astfel, se defineşte translaţia unui element pur masic, ca mişcarea liniară a unui corp ale cărui particule sunt legate rigid între ele, cu viteze şi acceleraţii proporţionale sau egale, la orice moment de timp. Simbolul acestui element este redat în fig. I.2.2 şi în fig. I.2.3 reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive. Pentru majoritatea covârşitoare a problemelor inginereşti, mişcările sunt nerelativiste şi impulsul variază liniar cu viteza, masa fiind newtonian ideală.

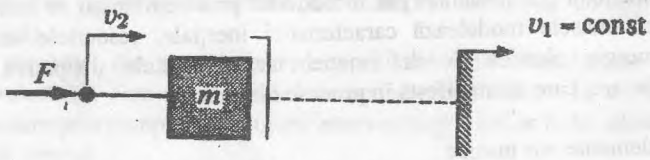


Fig. I.2.2 Simbolul unui element pur masic

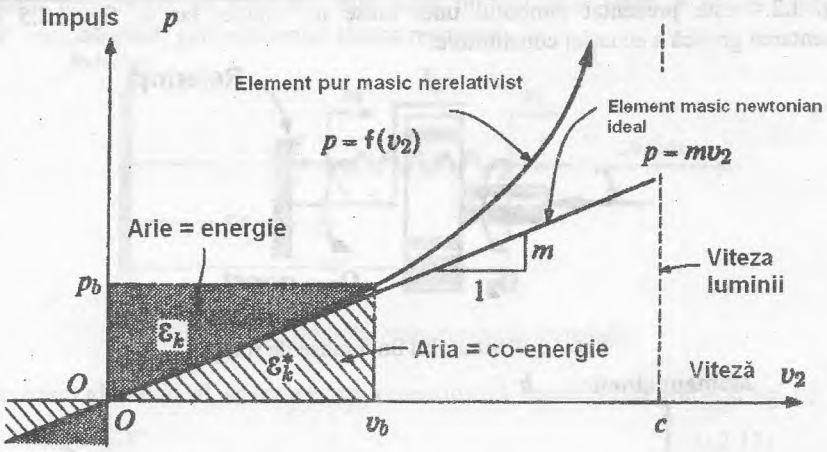


Fig. I.2.3 Reprezentarea grafică a ecuației constitutive

Dacă asupra masei acționează o forță F, pe un interval de timp $t \in [t_a, t_b]$, lucrul mecanic efectuat este:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F v_2 dt = \int_0^{p_b} v_2 dp \qquad \text{(I.2.4)}$$

unde: p_b este impulsul masei m la monetul de timp t_b.

Semnificația grafică a lucrului mecanic W_{ab} este aria cuprinsă între axa ordonatei p și curba p-v_2.

În aceste condiții, se spune că masa în mișcare înmagazinează energia W_{ab}, ca energie internă asociată impulsului acesteia, care în cazul problemelor practice inginerești (mase newtonian ideale) se calculează cu relația:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \qquad \text{(I.2.5)}$$

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.3, notată ε_k^*, se numește co-energie cinetică, iar în cazul maselor newtonian ideale avem:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^* \qquad \text{(I.2.6)}$$

b) Momentul de inerție J ale unei mase concentrate m, care se rotește în jurul unei axe, la raza r, se definește cu relația:

$$J = mr^2 \qquad \text{(I.2.7)}$$

Generalizând, pentru un număr n de particule masice, avem:

$$J = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad \text{(I.2.8)}$$

Momentul cinetic h, se definește cu ajutorul cuplului T:

$$T = \frac{dh}{dt} \qquad \text{(I.2.9)}$$

Se definește masa de rotație ideală ca o distribuție de mase ideale de translație, legate rigid între ele și obligate să se rotească cu viteza unghiulară Ω_2, în jurul unei axe. Ecuația constitutivă a acestei mase se scrie:

$$h = J\Omega_2 \qquad \text{(I.2.10)}$$

În fig. I.2.4 este prezentat simbolul unei mase de rotaţie, iar în fig. I.2.5 este dată reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive.

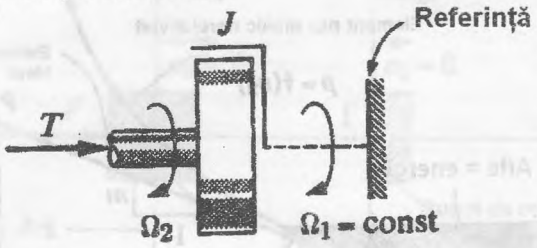


Fig. I.2.4 Simbolul unei mase de rotaţie

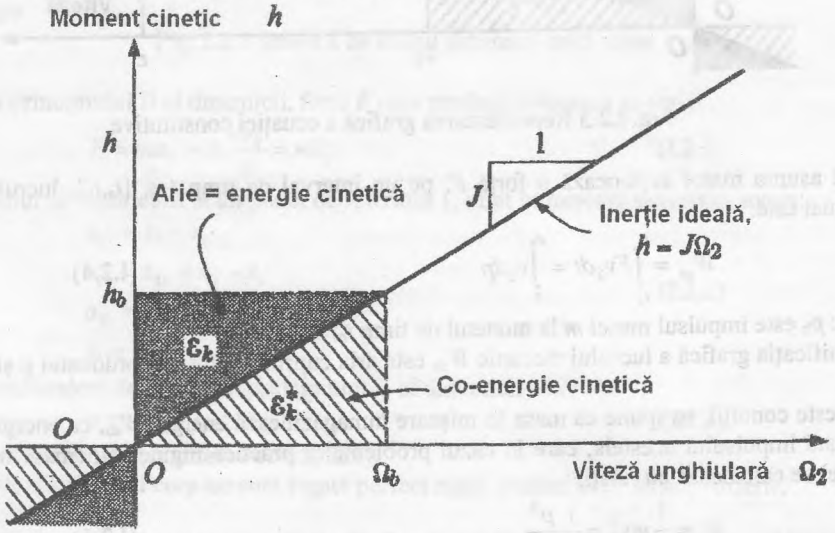


Fig. I.2.5 Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive

Masa de rotaţie ideală înmagazinează energie internă asociată momentului cinetic al acesteia:

$$\varepsilon_k = \int_0^{h_b} \Omega_2 dh = \frac{1}{2} J\Omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{J} \qquad \text{(I.2.11)}$$

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.5, notată ε_k^*, se numeşte co-energie cinetică, iar în cazul maselor de rotaţie ideale avem:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^* \qquad \text{(I.2.12)}$$

I.2.1.2. Elemente pur elastice

Materialele supuse diferitelor eforturi prezintă deformaţii. Caracteristicile elastice asociate, fără influenţa altor efecte precum cele inerţiale, conduc la definirea unui element pur elastic, lipsit de masă proprie şi care prezintă deformaţii staţionare sub acţiunea unor forţe de încărcare staţionare.

a) Simbolul unui resort de translație este redat în fig. I.2.6. Forța F poate fi privită ca "trecând" sau „curgând" prin elementul elastic respectiv.

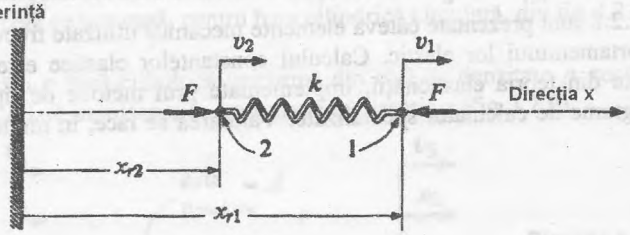


Fig. I.2.6 Simbolul unui resort de translație

Pentru un resort elastic ideal, se scrie ecuația constitutivă, reprezentată grafic în fig. I.2.7:

$$x_{21} = \frac{1}{k} F \qquad \text{(I.2.13)}$$

unde: k este constanta elastică.

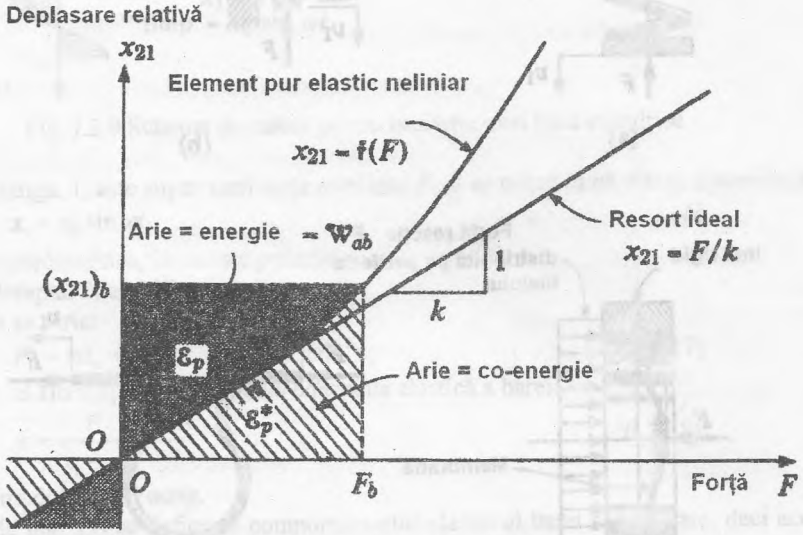


Fig. I.2.7 Reprezentarea grafică a ecuației constitutive

Lucrul mecanic efectuat de forța elastică F se scrie:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} F v_{21} dt = \int_{0}^{F_b} F dx_{21} \qquad \text{(I.2.14)}$$

unde: F_b este forța la momentul t_b.

Acest lucru mecanic corespunde ariei cuprinse între ordonata x_{21} și graficul curbei x_{21}-F, în fig. I.2.7.

Resortul înmagazinează energie potențială elastică de deformație, ε_p (vezi fig. I.2.7).

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.7, notată ε_p^*, se numește co-energie potențială, iar în cazul resoartelor ideale avem:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^* = \frac{1}{2k}F^2 = \frac{1}{2}kx_{21}^2 \qquad \text{(I.2.15)}$$

În fig. I.2.8 sunt prezentate câteva elemente mecanice utilizate frecvent în mecanisme, datorită comportamentului lor elastic. Calculul constantelor elastice este dificil şi implică metode avansate din teoria elasticităţii, implementate prin metode de tip element finit, în pachete de programe de calculator specializate. Validarea se face, în multe cazuri, prin teste experimentale.

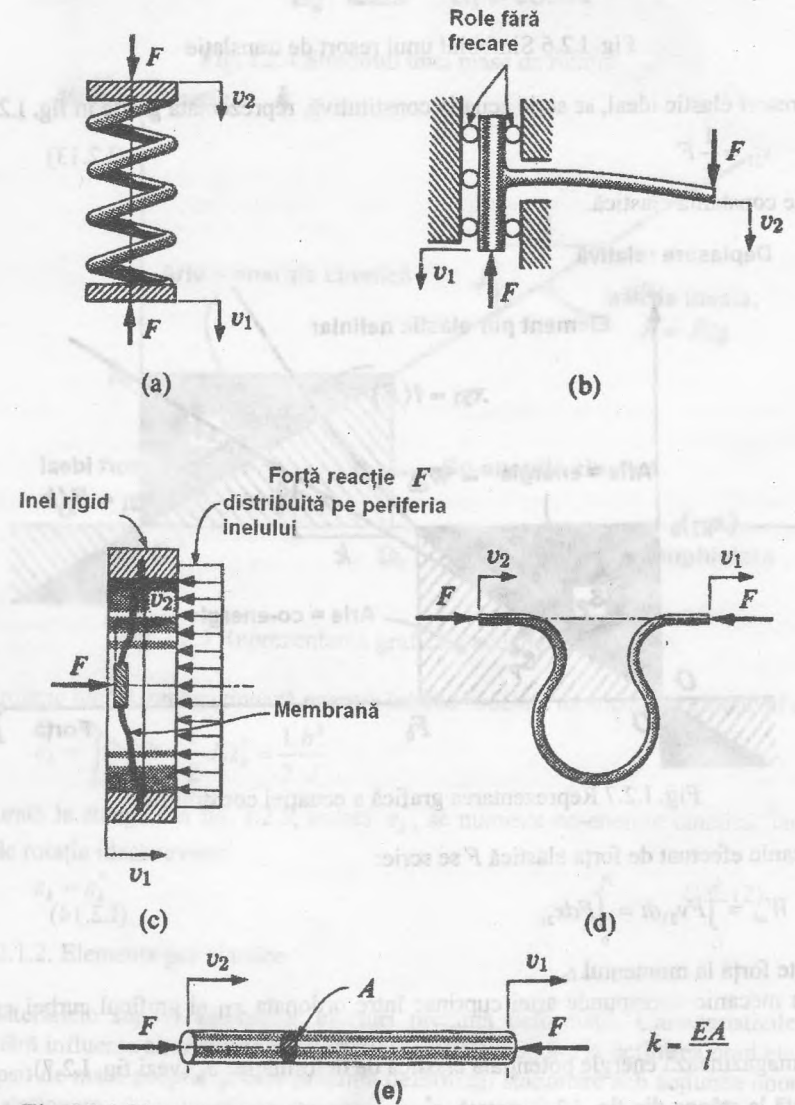


Fig. I.2.8 Elemente mecanice elastice, utilizate frecvent în mecanisme

Componentele mecanice pot fi caracterizate atât prin aspecte comportamentale inerțiale, cât și de tip elastic. Modul în care se face descrierea lor prin elemente pur elastice și/sau pur masice este exemplificat în cele ce urmează, pentru bara cilindrică circulară, din fig. I.2.8 (e).

Așadar, să considerăm o bară cilindrică uniformă din oțel de densitate ρ, secțiunea fiind A, lungimea l, masă m, aflată în mișcare de transalație în direcția x (fig. I.2.9).

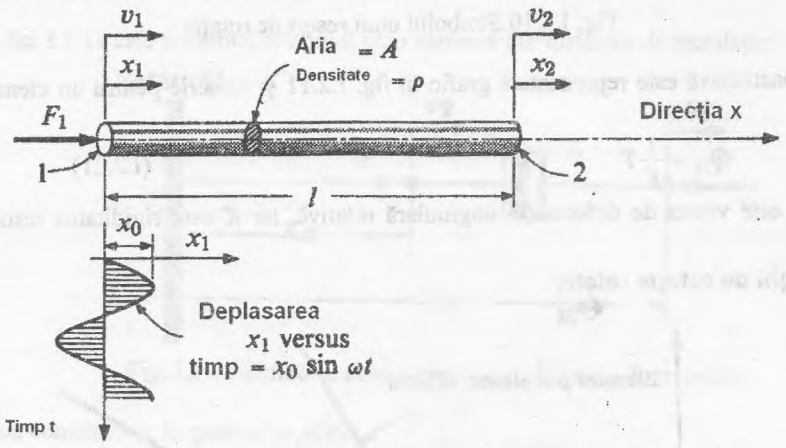


Fig. I.2.9 Schema de calcul pentru oscilația unei bare cilindrice

Capătul din stânga, 1, este supus unei forțe oscilante F_1 și se mișcă după o lege sinusoidală:

$$x_1 = x_0 \sin \omega t \tag{I.2.16}$$

unde: x_0 este amplitudinea, iar ω este pulsația.
Capătul din dreapta, 2, este liber.
Forța aplicată se scrie:

$$F_1 = m\ddot{x}_1 = m\omega^2 x_0 \sin \omega t = -m\omega^2 x_1 \tag{I.2.17}$$

Pe baza legii lui Hooke, se poate calcula constanta elastică a barei:

$$k = \frac{F_1}{x_1 - x_2} = \frac{EA}{l} \tag{I.2.18}$$

unde: E este modulul lui Young.
Cu relațiile de mai sus se definește comportamentul elastic al barei considerate, deci aceasta se poate modela ca un element pur elastic ideal.

Bara se comportă ca o masă ideală, dacă toate părțile sale se mișcă cu aceeași accelerație. Această condiție se scrie:

$$|\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2| << |\ddot{x}_1| \tag{I.2.19}$$

Prin prelucrarea ecuațiilor și inecuației de mai sus, avem:

$$\omega^2 << \frac{k}{m}, \; m = \rho A l$$
$$\omega << \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{I.2.20}$$

b) Simbolul unui resort de rotaţie este redat în fig. I.2.10. Resortul având caracteristici pur elastice, nu prezintă inerţie, deci transmite integral cuplul elastic, *T*.

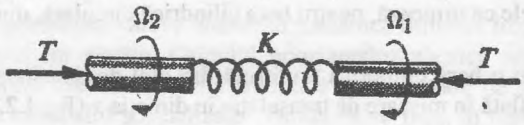


Fig. I.2.10 Simbolul unui resort de rotaţie

Ecuaţia constitutivă este reprezentată grafic în fig. I.2.11 şi se scrie pentru un element ideal astfel:

$$\Theta_{21} = \frac{1}{K} T \qquad \text{(I.2.21)}$$

unde: Θ_{21} este viteza de deformaţie unghiulară relativă, iar K este rigiditatea resortului de rotaţie.

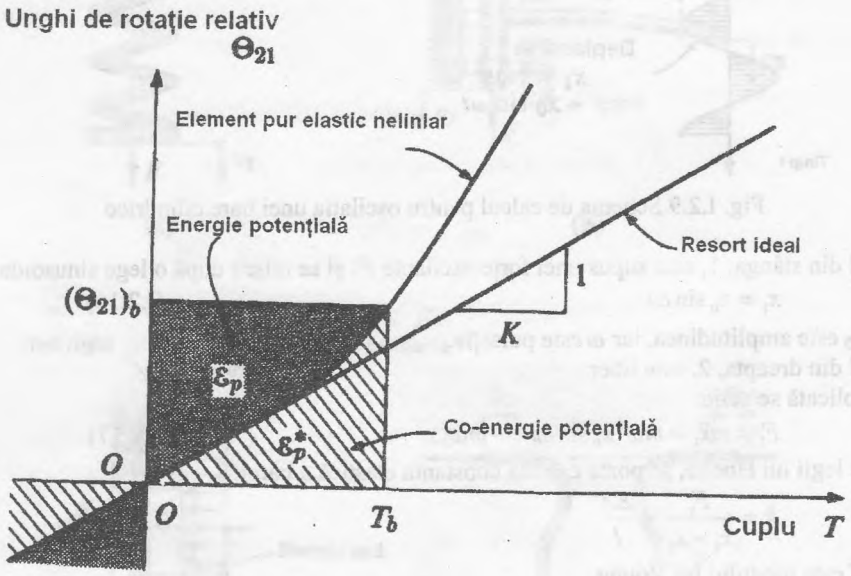


Fig. I.2.11 Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive

Se mai poate scrie:

$$\Omega_{21} = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{d\Theta_{21}}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dT}{dt} \qquad \text{(I.2.22)}$$

Resortul înmagazinează energie potenţială elastică de deformaţie, ε_p (vezi fig. I.2.11). Dacă resortul este ideal, avem:

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2K} T^2 = \frac{1}{2} K \Theta_{21}^2 \qquad \text{(I.2.23)}$$

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.11, notată ε_p^*, se numeşte co-energie potenţială, iar în cazul resoartelor ideale avem:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^* \qquad \text{(I.2.24)}$$

I.2.1.3. Elemente pur disipative (de frecare)

În natură se manifestă frecări, sub forma unor forțe proporționale, sau cel puțin care depind de vitezele relative ale corpurilor aflate în mișcare. În acest sens, se definește elementul pur disipativ (de frecare), la care nu se constată efecte masice sau de tip elastic și care se opune alunecării cu anumite viteze, între părțile aflate în contact.

a) În fig. I.2.12 este prezentat simbolul unui element pur disipativ de translație.

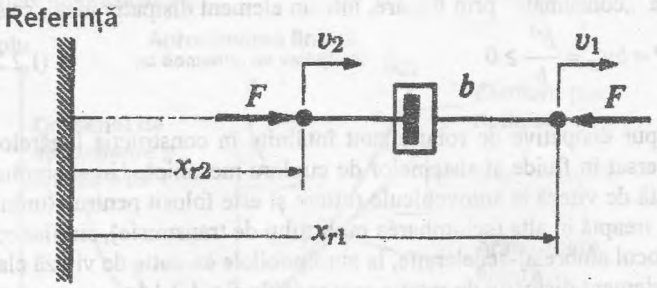


Fig. I.2.12 Simbolul unui element pur disipativ de translație

Ecuația constitutivă, în general se scrie:

$$F = f(v_2 - v_1) = f(v_{21}) \qquad \text{(I.2.25)}$$

Dacă elementul este ideal, ecuația de mai sus devine:

$$F = b(v_2 - v_1) = bv_{21} \qquad \text{(I.2.26)}$$

unde: b este coeficientul de disipare de translație.

Reprezentarea grafică a ecuației constitutive este dată în fig. I.2.13. Cazul legilor de variație neliniare corespunde mișcării cu viteze mari prin medii fluide, iar frecarea Coulombiană se manifestă la contactul direct ("uscat") dintre două suprafețe solide, în absența unui agent lubrifiant fluid.

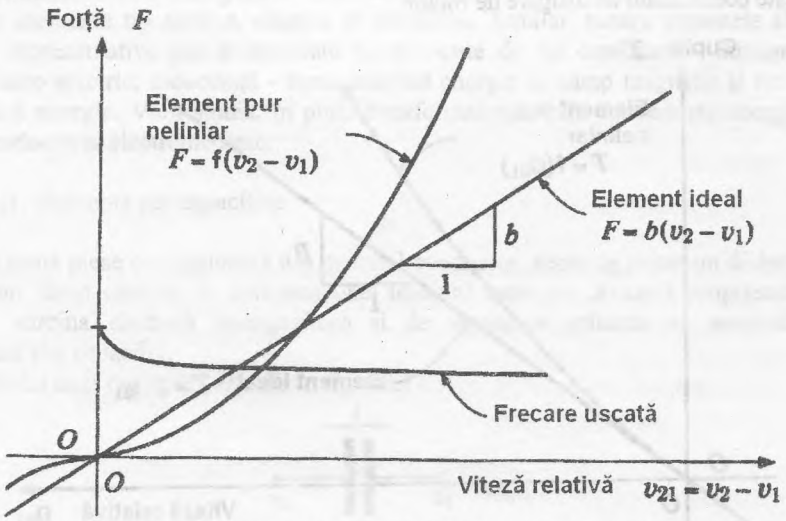


Fig. I.2.13 Reprezentarea grafică a ecuației constitutive

Lucrul mecanic disipat prin frecare se calculează cu relaţia:

$$W_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} v_{21} f(v_{21}) dt \qquad \text{(I.2.27)}$$

În comparaţie cu elementele pur masice şi elastice, cele pur disipative nu pot acumula energie mecanică, ci aşa cum spune şi numele lor „consumă" energia primită şi o transformă în căldură, prin frecare. Matematic, produsul termenilor de sub integrală este întotdeauna pozitiv, deci W_{ab} creşte invariabil în timp.
Similar, puterea „consumată" prin frecare, într-un element disipativ ideal, se scrie:

$$P = bv_{21}^2 = \frac{F^2}{b} \geq 0 \qquad \text{(I.2.28)}$$

b) Elementele pur disipative de rotaţie sunt întâlnite în construcţia lagărelor, dispozitivelor funcţionând imersat în fluide şi sistemelor de cuplare mecanică. Un exemplu tipic se găseşte în cutia automată de viteză la autovehicule rutiere şi este folosit pentru eliminarea şocurilor la trecerea dintr-o treaptă în alta (schimbarea raportului de transmisie), similar cu ceea ce se face neasistat, prin jocul ambreiaj-acceleraţie, la automobilele cu cutie de viteză clasică.
Simbolul unui element disipativ de rotaţie este redat în fig. I.2.14.

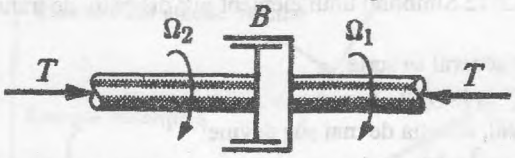


Fig. I.2.14 Simbolul unui element disipativ de rotaţie

Ecuaţia constitutivă corespunzătoare unui element ideal este reprezentată grafic în fig. I.2.15 şi se scrie:

$$T = B(\Omega_2 - \Omega_1) = B\Omega_{21} \qquad \text{(I.2.29)}$$

unde: B este coeficientul de disipare de rotaţie.

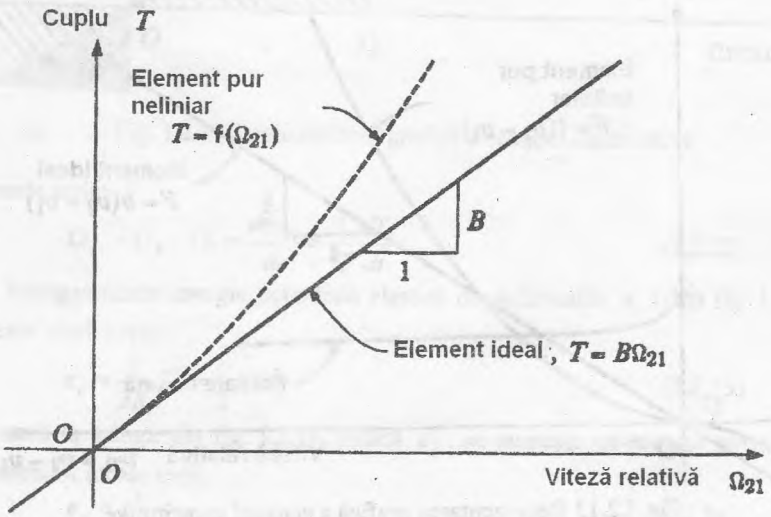


Fig. I.2.15 Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive

Puterea „consumată" prin frecare, într-un element disipativ ideal, se scrie:

$$P = B\Omega_{21}^2 = \frac{T^2}{B} \geq 0 \qquad \text{(I.2.30)}$$

În multe aplicații practice, sunt întâlnite elemente disipative de rotație neliniare. Deoarece, vitezele relative Ω_{21} variază pe intervale relativ restrânse, se poate liniariza caracteristica pe porțiuni, conform unei metodolgii prezentată grafic în fig. I.2.16. Prin această metodă se pot defini „local" coeficienți B, în modele liniare simplificate, valabile în jurul unor puncte de funcționare semnificative.

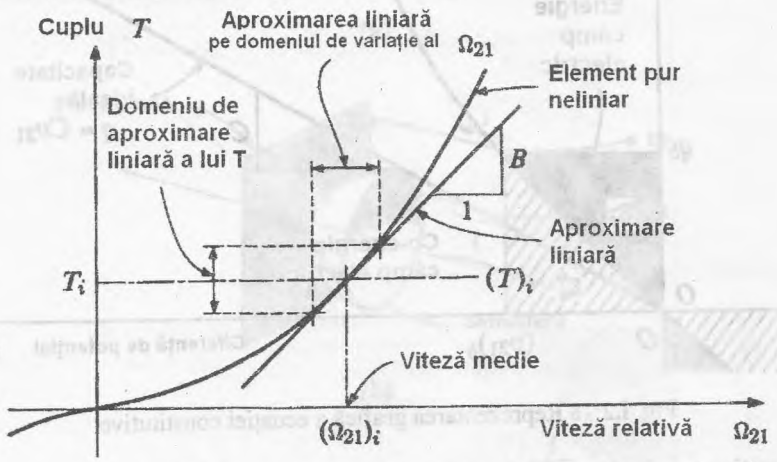


Fig. I.2.16 Liniarizarea pe porțiuni a ecuației constitutive

I.2.2. Sisteme (elemente) pur electrice

Am convenit anterior, pentru sistemele mecanice, că putem modela procesele dinamice cu elemente tip masice, elastice şi disipative. Similar, pentru sistemele electrice fenomenele reprezentative pot fi modelate cu elemente de tip capacitate - înmagazinând energie în câmp electric, inductanță - înmagazinând energie în câmp magnetic şi rezistență, care disipează energie. Vom studia, în plus, transformatorul, care converteşte energie, fără disipare şi traductorul electromecanic.

I.2.2.1. Elemente pur capacitive

Între două piese confecționate din material conductor, separate printr-un dielectric, se poate crea un câmp electric, la aplicarea unei tensiuni între ele. Această proprietate, care depinde de sarcina electrică înmagazinată şi de tensiunea aplicată, se asociază unui comportament pur capacitiv.

Simbolul unei capacități este dat în fig. I.2.17.

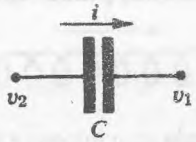


Fig. I.2.17 Simbolul unei capacități electrice

O capacitate ideală este caracterizată de următoarea ecuaţie constitutivă:

$$q = Cv_{21} \tag{I.2.31}$$

unde: C este capacitatea electrică, q este sarcina, iar $v_{21} = v_2 - v_1$ este diferenţa de potenţial, sau tensiunea.

Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive este dată în fig. I.2.18.

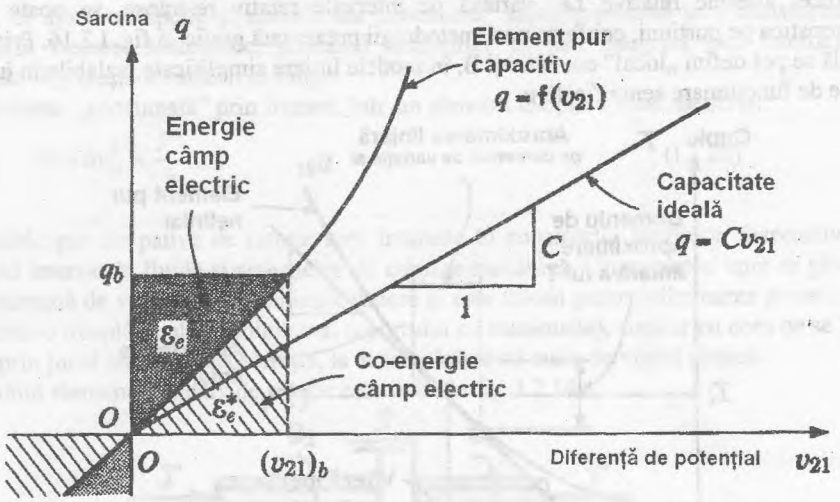


Fig. I.2.18 Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive

Pe baza ecuaţiei constitutive, se deduce ecuaţia funcţională a condensatorului:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_{21}}{dt} \tag{I.2.32}$$

unde: i este intensitatea curentului de încărcare-descărcare.

Energia electrică înmagazinată în condensator poate fi identificată pe cale grafică în fig. I.2.18 şi se scrie:

$$\varepsilon_e = \int_0^{q_b} v_{21}\,dq \tag{I.2.33}$$

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.18, notată ε_e^*, se numeşte co-energie în câmp electric, iar în cazul capacităţilor ideale avem:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e^* = \frac{1}{2}Cv_{21}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \geq 0 \tag{I.2.34}$$

În fig. I.2.19 sunt prezentate câteva dispozitive, care pot fi asimilate ca şi condensatoare. Capacitatea acestora depinde de geometria lor şi de proprietăţile electrice ale materialelor, din care sunt confecţionate. Pentru configuraţii geometrice complexe, metoda de calcul a capacităţii este laborioasă şi implică utilizarea teoriei câmpului electric. Practic, determinările experimentale sunt recomandate, pentru validarea rezultatelor obţinute pe cale teoretică.

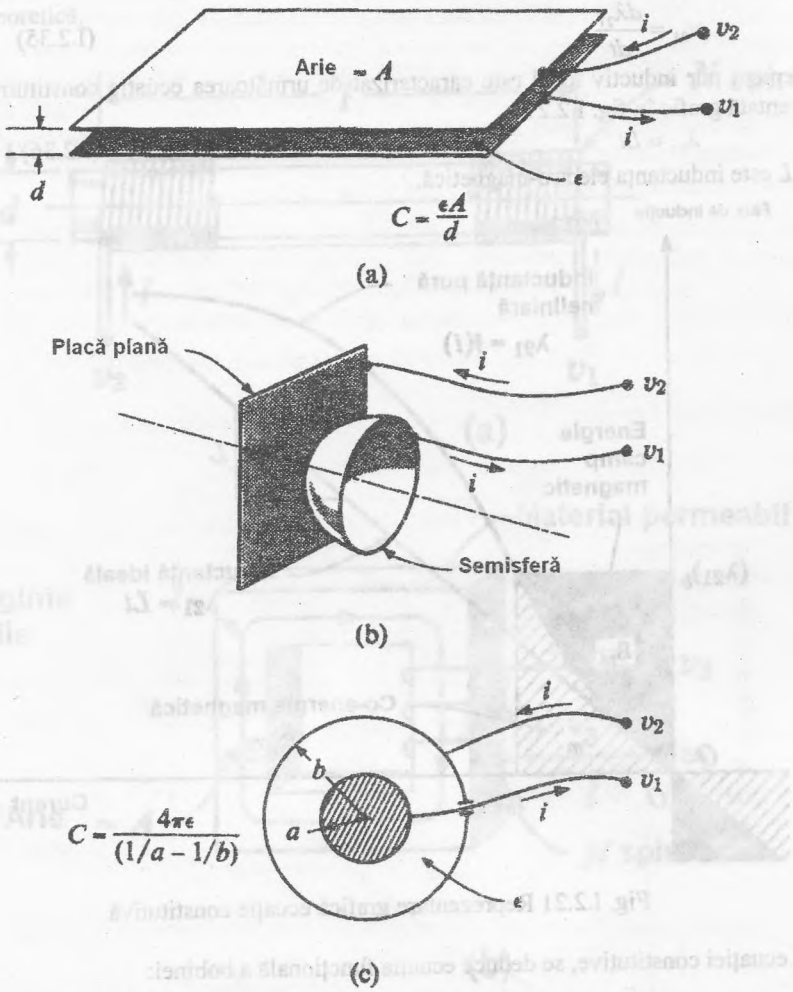


Fig. I.2.19 Dispozitive, care pot fi asimilate ca şi condensatoare

I.2.2.2. Elemente pur inductive

La trecerea curentului electric printr-un dispozitiv conductor, în jurul acestuia se crează un câmp magnetic. La variaţia curentului se modifică intensitatea câmpului magnetic, ceea ce va induce la apariţia unei tensiuni electrice, v_{21}, care se opune variaţiei presupuse a curentului, i. Această proprietate este specifică elementelor de tip inductanţă, deseori materializate practic sub forma unor bobine. Simbolul acestui element este redat în fig. I.2.20.

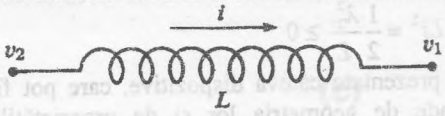


Fig. I.2.20 Simbolul unui element inductiv

Se defineşte fluxul de inducţie λ_{21}, pe baza relaţiei:

$$v_{21} = \frac{d\lambda_{21}}{dt} \tag{I.2.35}$$

Un element pur inductiv ideal este caracterizat de următoarea ecuaţie constitutivă, care este reprezentată grafic în fig. I.2.21:

$$\lambda_{21} = Li \tag{I.2.36}$$

unde: L este inductanţa electro-magnetică.

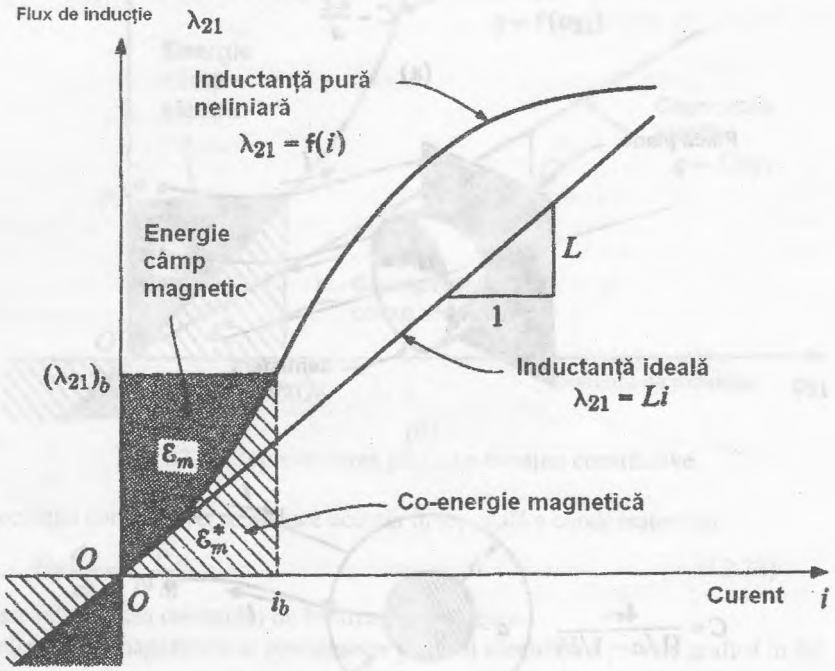


Fig. I.2.21 Reprezentare grafică ecuaţie constitutivă

Pe baza ecuaţiei constitutive, se deduce ecuaţia funcţională a bobinei:

$$v_{21} = L\frac{di}{dt} \tag{I.2.37}$$

Energia magnetică înmagazinată în bobină poate fi identificată pe cale grafică în fig. I.2.21 şi se scrie:

$$\varepsilon_m = \int_{t_a}^{t_b} v_{21} i dt = \int_0^{i_b} i d\lambda_{21} \tag{I.2.38}$$

Aria haşurată la stânga din fig. I.2.21, notată ε_m^*, se numeşte co-energie în câmp magnetic, iar în cazul inductanţelor ideale avem:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^* = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{21}^2}{L} \geq 0 \tag{I.2.39}$$

În fig. I.2.22 sunt prezentate câteva dispozitive, care pot fi asimilate ca şi bobine. Inductanţa acestora depinde de geometria lor şi de proprietăţile electro-magnetice ale materialelor, din care sunt confecţionate. Pentru configuraţii geometrice complexe, metoda de calcul a inductanţei este laborioasă şi implică utilizarea teoriei câmpului electro-magnetic.

Practic, determinările experimentale sunt recomandate, pentru validarea rezultatelor obținute pe cale teoretică.

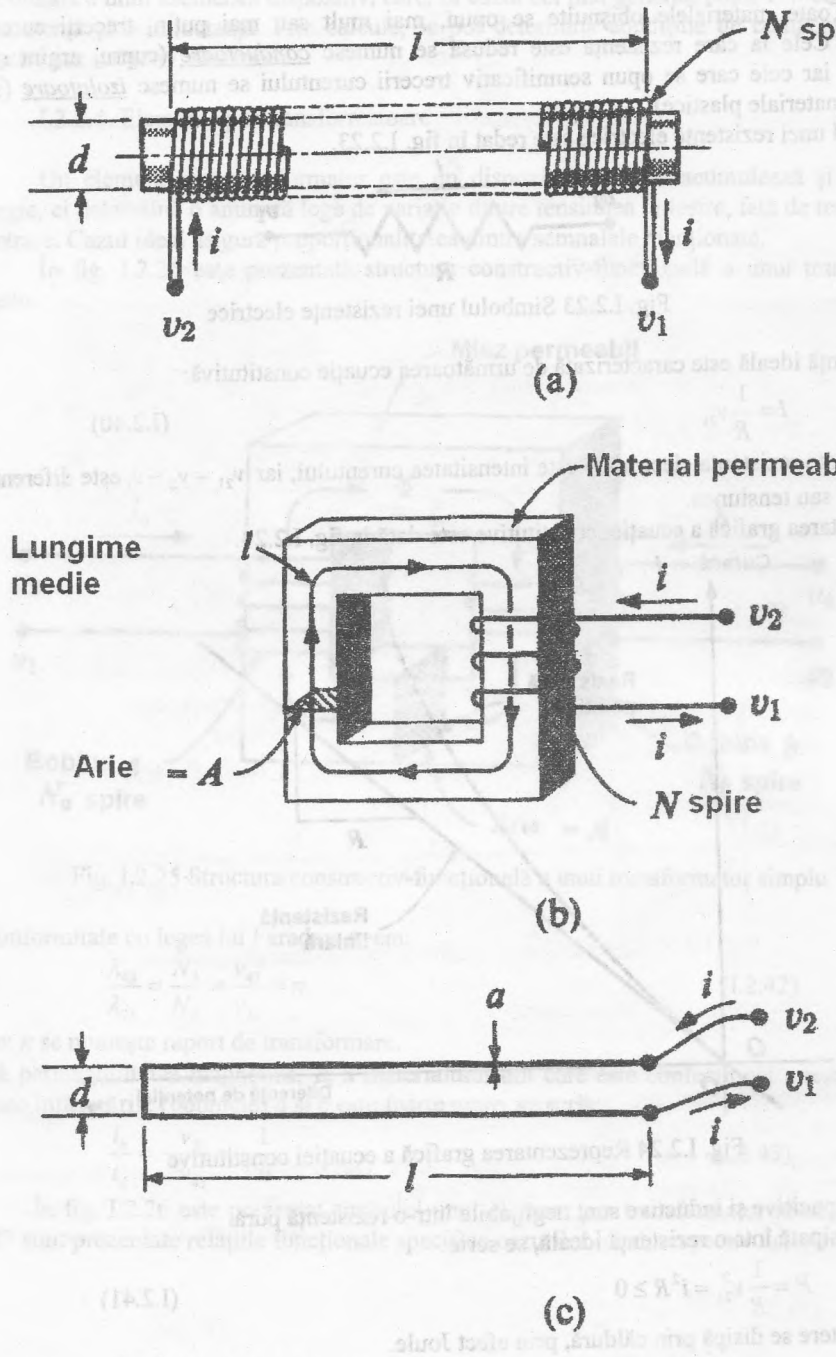


Fig. I.2.22 Dispozitive, care pot fi asimilate ca și bobine

I.2.2.3. Elemente pur rezistive

Toate materialele obişnuite se opun, mai mult sau mai puţin, trecerii curentului electric. Cele la care rezistenţa este redusă se numesc *conductoare* (cupru, argint şi alte metale), iar cele care se opun semnificativ trecerii curentului se numesc *izolatoare* (sticlă, mică şi materiale plastice).
Simbolul unei rezistenţe electrice este redat în fig. I.2.23.

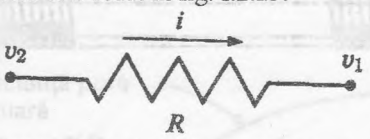


Fig. I.2.23 Simbolul unei rezistenţe electrice

O rezistenţă ideală este caracterizată de următoarea ecuaţie constitutivă:

$$i = \frac{1}{R} v_{21} \qquad \text{(I.2.40)}$$

unde: R este rezistenţa electrică, i este intensitatea curentului, iar $v_{21} = v_2 - v_1$ este diferenţa de potenţial, sau tensiunea.
Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive este dată în fig. I.2.24.

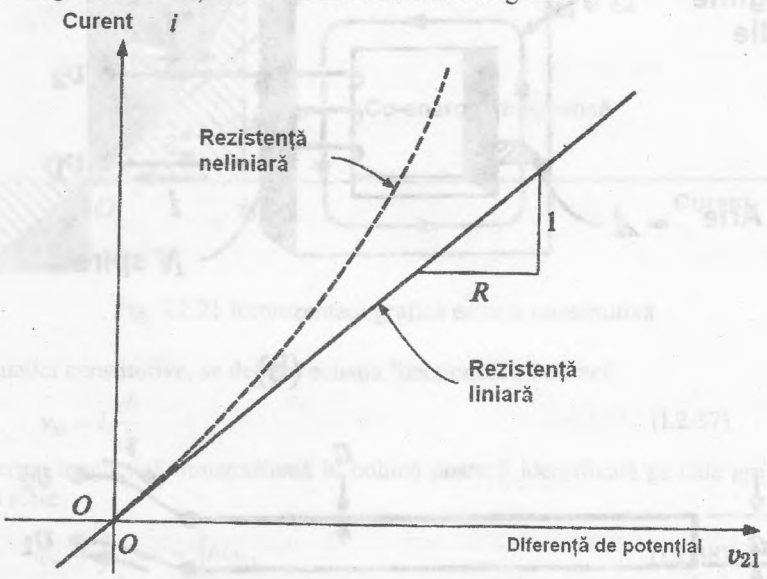


Fig. I.2.24 Reprezentarea grafică a ecuaţiei constitutive

Efectele capacitive şi inductive sunt neglijabile într-o rezistenţă pură.
Puterea disipată într-o rezistenţă ideală, se scrie:

$$P = \frac{1}{R} v_{21}^2 = i^2 R \geq 0 \qquad \text{(I.2.41)}$$

Această putere se disipă prin căldură, prin efect Joule.

Forma de realizare practică a unei rezistențe pure este asemănătoare, uneori identică cu a unei bobine (vezi fig. I.2.22(a)). Problema care se pune este legată de caracterizarea funcțională a unui asemenea dispozitiv, care, în cazul cel mai general, poate fi modelat printr-o rezistență și o inductanță. Prin calcule, se pot determina condițiile de comportament pur rezistiv, pur inductiv, sau mixt.

I.2.2.4. Elemente pur transformatoare

Un element pur transformator este un dispozitiv care nu acumulează și nu disipă energie, ci determină o anumită lege de variație dintre tensiunea la ieșire, față de tensiunea de la intrare. Cazul ideal asigură proporționalitatea dintre semnalele menționate.

În fig. I.2.25 este prezentată structura constructiv-funcțională a unui transformator simplu.

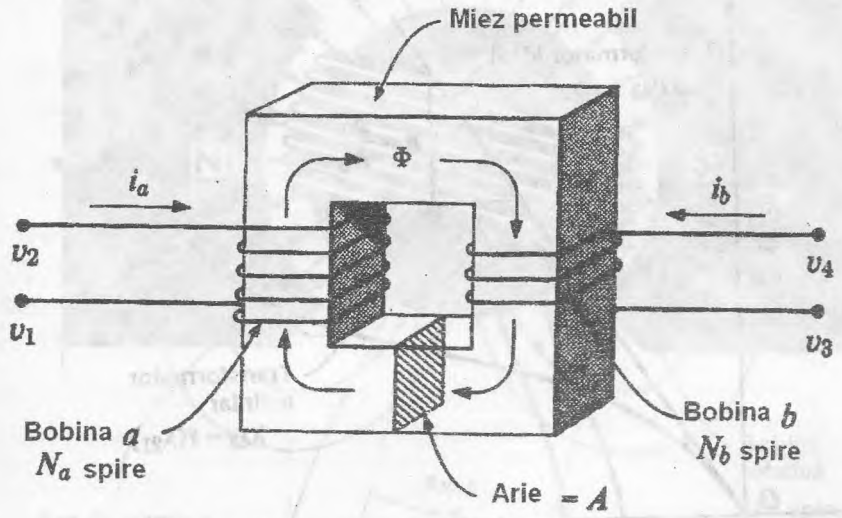


Fig. I.2.25 Structura constructiv-funcțională a unui transformator simplu

În conformitate cu legea lui Faraday, avem:

$$\frac{\lambda_{43}}{\lambda_{21}} = \frac{N_b}{N_a} = \frac{v_{43}}{v_{21}} = n \qquad \text{(I.2.42)}$$

unde: n se numește raport de transformare.

Dacă permeabilitatea magnetică, μ, a materialului din care este confecționat miezul pe sunt plasate înfășurările (bobinele) a și b este foarte mare, se scrie:

$$\frac{i_b}{i_a} = -\frac{v_{21}}{v_{43}} = -\frac{1}{n} \qquad \text{(I.2.43)}$$

În fig. I.2.26 este prezentat simbolul unui element pur transformator ideal, iar în fig. I.2.27 sunt prezentate relațiile funcționale specifice cazurilor ideal, respectiv neliniar.

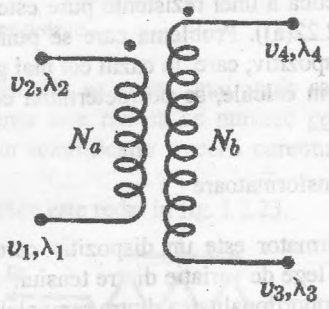


Fig. I.2.26 Simbolul unui element pur transformator ideal

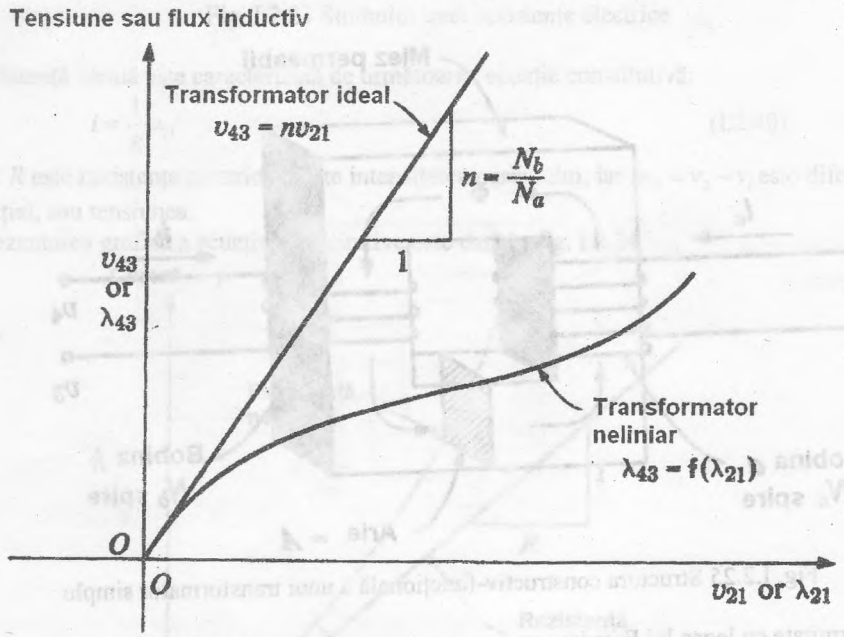


Fig. I.2.27 Reprezentarea grafică a relaţiei funcţionale

I.2.2.5. Traductoare electromecanice

Traductoarele electromecanice convertesc energia electrică în energie mecanică, sau viceversa. Exemple: motoare electrice, generatoare piezoelectrice şi cristale electro-magneto-strictive, bobine de difuzor, relee etc.

Un exemplu tipic este prezentat în fig. I.2.28. Dispozitivul transformă intensitatea curentul electric din înfăşurarea miezului rotitor, i_a, într-un cuplu mecanic aplicat acestuia, T_b şi tensiunea de alimentare a înfăşurării miezului, v_{21}, într-o viteză unghiulară a mişcării de rotaţie a acestuia, Ω_4:

$$\begin{cases} T_b = -2NBlr_c i_a = -\dfrac{1}{n} i_a \\ v_{21} = 2NBlr_c \Omega_4 \end{cases} \qquad \text{(I.2.44)}$$

unde: N este numărul de spire al înfăşurării miezului rotitor; B este inducţia câmpului creat de magnetul permanent fix; $2Nl$ este lungimea totală a conductorului mobil, plasat în câmpul magnetic fix; r_c este raza miezului rotitor; n este constanta aparatului de măsură – traductorului electromecanic studiat.

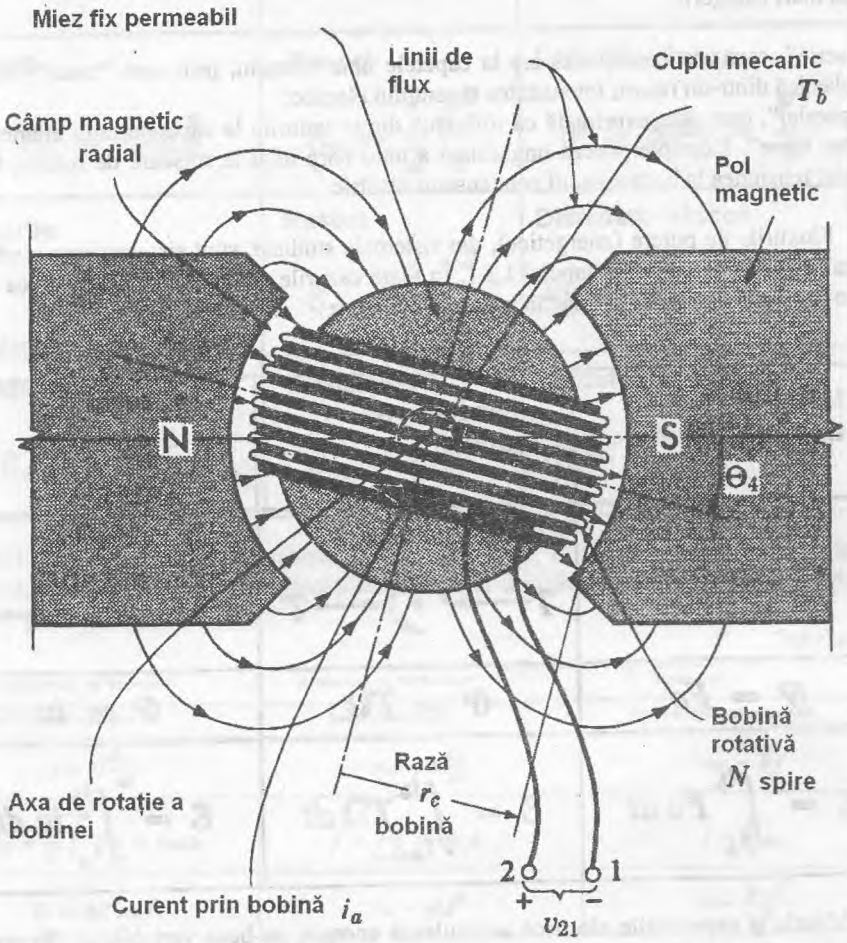


Fig. I.2.28 Exemplu tipic de traductor electromecanic

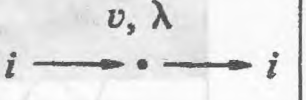
I.2.3. Clasificare variabile şi sistematizare elemente pur mecanice şi electrice

Variabilele care intervin în ecuaţiile scrise în paragrafele anterioare, pot fi clasificate în două mari categorii:

- "în serie", care are aceeaşi valoare la capetele unui element, prin care "trece". Exemple: forţa elastică dintr-un resort; intensitatea curentului electric;
- "în paralel", care este exprimată ca diferenţă dintre valorile la capetele unui element, prin care "nu trece". Exemple: viteza unghiulară a unui corp aflat în mişcare de rotaţie, în jurul unei axe; tensiunea la bornele unui condensator electric.

Fluxurile de putere (energetice), din sistemele studiate, sunt sistematizate simbolic şi pe baza relaţiilor de calcul în tabelul I.2.1. În toate cazurile, puterea este calculată ca produs dintre o variabilă "în serie" şi una "în paralel".

Tabelul I.2.1

Mecanic - de translaţie	**Mecanic - de rotaţie**	**Electric**
		
$\mathcal{P} = Fv$	$\mathcal{P} = T\Omega$	$\mathcal{P} = iv$
$\mathcal{E} = \int_{t_a}^{t_b} Fv\,dt$	$\mathcal{E} = \int_{t_a}^{t_b} T\Omega\,dt$	$\mathcal{E} = \int_{t_a}^{t_b} iv\,dt$

Masele şi capacităţile electrice acumulează energie, pe baza variabilelor "în serie" – viteza şi tensiunea. Resoartele elastice şi inductanţele acumulează energie, pe baza variabilelor "în paralel" – forţa şi intensitatea curentului electric. Elementele disipative, respectiv rezistenţele electrice disipă energie, pe baza ambelor variabile, "în serie" şi "în paralel" – forţa şi viteza, respectiv intensitatea curentului electric şi tensiunea. Tabelul I.2.2 sistematizează acest aspect funcţional.

Tabelul I.2.2

Acumulare, de tip "în paralel"	Acumulare, de tip "în serie"	Tip disipativ
Masă	Resort	Disipativ vâscos
$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv_2^2$	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	$\mathcal{P} = bv_{21}^2 = \frac{F^2}{b}$
Inerție	Resort	Disispativ vâscos
$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}J\Omega_2^2$	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{T^2}{K}$	$\mathcal{P} = B\Omega_{21}^2 = \frac{T^2}{B}$
Capacitate	Inductanță	Rezistență
$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}C(v_{21})^2$	$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$	$\mathcal{P} = \frac{(v_{21})^2}{R} = Ri^2$

În tabelul I.2.3 sunt grupate elementele de tip acumulator "în serie" şi "în paralel", respectiv disipative, mecanice şi electrice. Notațiile corespund utilizării variabilelor generalizate: "în serie" – f şi "în paralel" – v.

Tabelul I.2.3

Acumulare de tip "în paralel"	Acumulare, de tip "în serie"	Tip disipativ
Masă, inerție, capacitate	Resort, inductanță	Disipare vâscoasă, rezistență
$f = C\frac{dv_{21}}{dt}$	$v_{21} = L\frac{df}{dt}$	$v_{21} = Rf$
$v_{21} = \frac{1}{C}\int_0^t f\,dt + (v_{21})_0$	$f = \frac{1}{L}\int_0^t v_{21}\,dt + f_0$	$f = \frac{1}{R}v_{21}$
$\mathcal{E}_a = \frac{1}{2}C(v_{21})^2$	$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}Lf^2$	$\mathcal{P} = \frac{(v_{21})^2}{R}$

I.2.4. Sisteme (elemente) pur fluidice

Elementele pur fluidice sunt analoage cu elementele mecanice şi electrice discutate anterior. În practică, ele sunt conectate cu tuburi şi conducte, pentru a forma rețele asemănătoare cu cele electrice. Debitul este analog cu intensitatea curentului electric, iar presiunea este analoagă cu potențialul electric. Caracteristicile elementelor pneumatice au un grad de neliniaritate mai pronunțat decât cele ale elementelor hidraulice.

Debitul este o variabilă de tip "în serie", iar căderea de presiune una de tip "în paralel". Capacitatea fluidică acumulează energie prin intermendiul presiunii, inductanța fluidică acumulează energie prin intermendiul debitului, iar rezistența fluidică disipează energie, prin frecare.

I.2.4.1. Elemente pur capacitive

Există mai multe soluţii constructiv-funcţionale de realizare a elementelor pur capacitive: a) rezervoare deschise; b) rezervoare închise presurizate; c) acumulatoare cu piston şi resort elastic, respectiv acumulatoare hidro-pneumatice.

a) Rezervor deschis

În fig. I.2.29 este reprezentat un rezervor deschis, alimentat pe la partea inferioară cu un debit Q, nivelul H şi presiunea la baza sa crescând continuu.

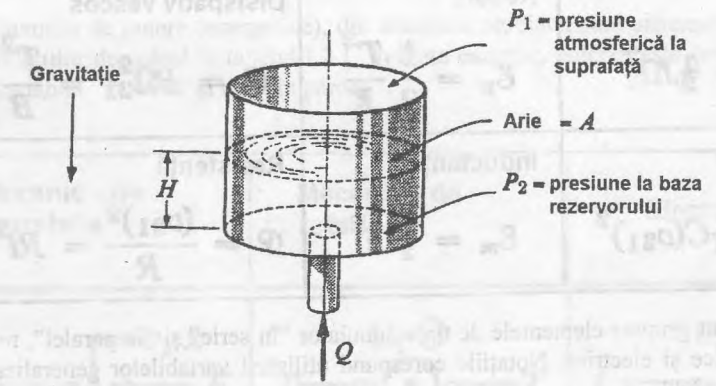


Fig. I.2.29 Rezervor deschis, alimentat pe la partea inferioară

Dacă mişcarea lichidului în rezervor este considerată lentă şi se neglijează pierderile de energie, atunci diferenţa de presiune dintre baza rezervorului şi suprafaţa liberă a lichidului se scrie:

$$P_{21} = P_2 - P_1 = \rho g H \tag{I.2.45}$$

unde: ρ este densitatea lichidului.

Din ecuaţia de continuitate, considerând lichidul practic incompresibil, se deduce:

$$Q = A\frac{dH}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{dP_{21}}{dt} = C_f \frac{dP_{21}}{dt} \tag{I.2.46}$$

unde: A este aria rezervorului, C_f este capacitatea fluidică a rezervorului considerat.

În fig. I.2.30 este prezentat simbolul unui element pur capacitiv fluidic. Conexiunea desenată cu linie întreruptă (prin care nu are loc nici o curgere) corespunde presiunii de referinţă P_1, care este de obicei presiunea atmosferică, echivalentul masei din electrotehnică.

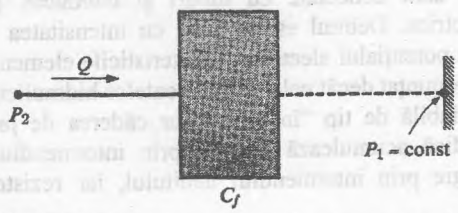


Fig. I.2.30 Simbolul unui element pur capacitiv fluidic

Ecuația constitutivă, a condensatorului fluidic astfel format, se obține prin introducerea în ecuația precedentă a volumului de lichid din rezervor, $V = AH$:

$$dV = Qdt = C_f dP_{21} \Leftrightarrow \vartheta = C_f P_{21} \tag{I.2.47}$$

Această ecuație corespunde cazului capacității fluidice ideale, reprezentarea grafică fiind dată în fig. I.2.31. Dependența $\vartheta = f(P_{21})$ este generalizarea ecuației constitutive pentru elementul pur capacitiv fluidic.

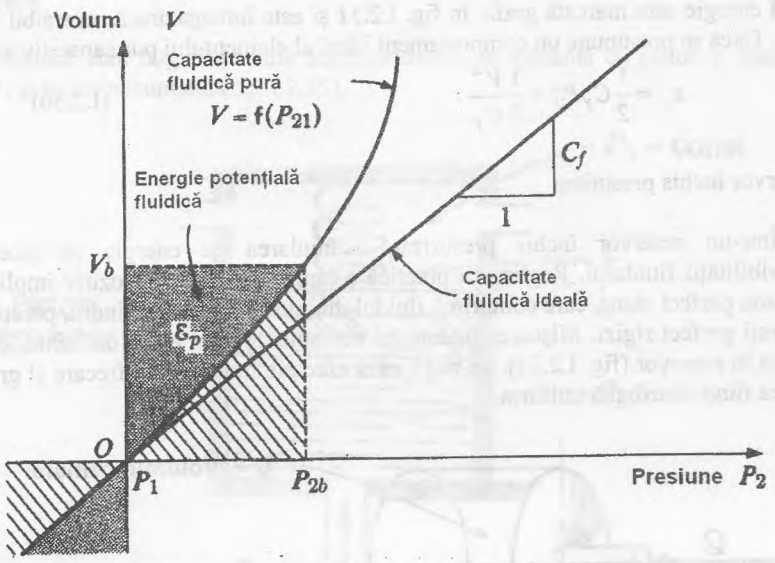


Fig. I.2.31 Reprezentarea grafică a ecuației constitutive pentru elementul pur capacitiv fluidic

Condensatorul fluidic înmagazinează energie potențială de presiune. Practic, debitul de lichid care intră în rezervor, Q, este asigurat cu ajutorul unei pompe, ca în schema din fig. I.2.32.

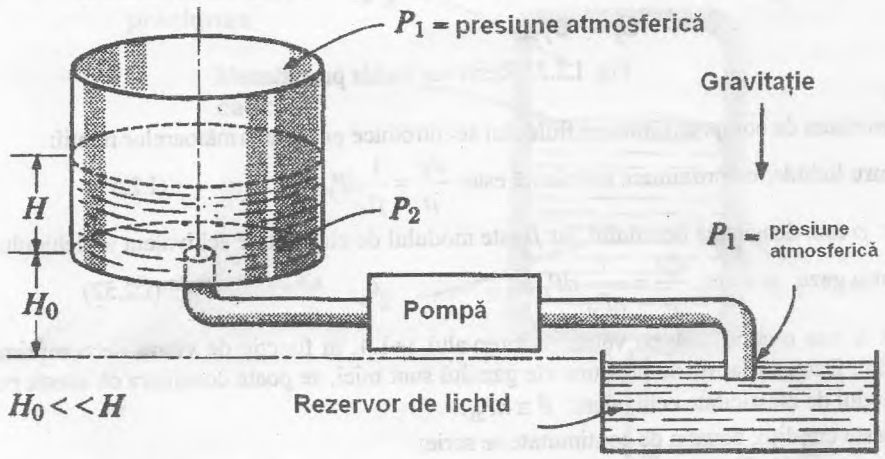


Fig. I.2.32 Schemă alimentare rezervor cu pompă

Puterea hidraulică furnizată de pompă se scrie:

$$P_p = QP_{21} \tag{I.2.48}$$

Corespunzător, energia furnizată de pompă pentru a creşte presiunea din rezervorul superior de la presiunea P_1 la P_2 este:

$$\varepsilon_p = \int_{t_a}^{t_b} P_p dt = \int_{t_a}^{t_b} P_{21} Q dt = \int_0^{P_{21}} P_{21} dV \tag{I.2.49}$$

Această energie este marcată grafic în fig. I.2.31 şi este înmagazinată reversibil în rezervorul deschis. Dacă se presupune un comportament ideal al elementului pur capacitiv studiat, avem:

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{V^2}{C_f} \tag{I.2.50}$$

b) Rezervor închis presurizat

Într-un rezervor închis presurizat, acumularea de energie se face pe seama compresibilităţii fluidului. Realizarea practică a unui asemenea dispozitiv implică utilizarea unui piston perfect etanş, care comprimă fluidul din interiorul unui cilindru, pereţii solizi fiind consideraţi perfect rigizi. Mişcarea pistonului corespunde unui aport de lichid, cu debitul Q, care intră în rezervor (fig. I.2.33). Se neglijează efectele inerţiale, de frecare şi gravitaţionale, presiunea fiind distribuită uniform.

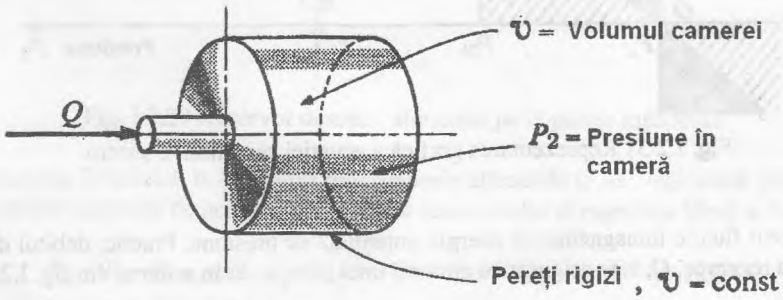


Fig. I.2.33 Rezervor închis presurizat

Proprietatea de compresibilitate a fluidului se introduce pe baza următoarelor relaţii:

- pentru lichide, o aproximare suficientă este: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\beta} dP_{21}$, (I.2.51)

unde: ρ este densitatea lichidului, iar β este modulul de elasticitate echivalent al lichidului;

- pentru gaze, se scrie: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{nP_{21}} dP_{21}$, (I.2.52)

unde: n este o constantă, cu valori în intervalul 1÷1.4, în funcţie de viteza de comprimare a gazului. Dacă variaţiile de presiune ale gazului sunt mici, se poate considera că acesta posedă un modul de elasticitate echivalent: $\beta \cong nP_{21}$.

În aceste condiţii, ecuaţia de continuitate se scrie:

$$Q = \frac{V}{\beta} \frac{dP_{21}}{dt} \tag{I.2.53}$$

Dacă modulul de elasticitate echivalent, β, este constant, sau dacă fluidul este barotrop, adică β depinde de diferența de presiune P_{21} – cazul cel mai uzual fiind cel al unui lichid – atunci se scrie:

$$dV = Qdt = \frac{V}{\beta} dP_{21} \Leftrightarrow \vartheta = \frac{V}{\beta} P_{21} = C_f P_{21} \qquad \text{(I.2.54)}$$

c) Acumulator

În tehnică sunt larg răspândite acumulatoarele, în variantă cu piston și resort elastic (fig. I.2.34) și hidro-pneumatic (fig. I.2.35).

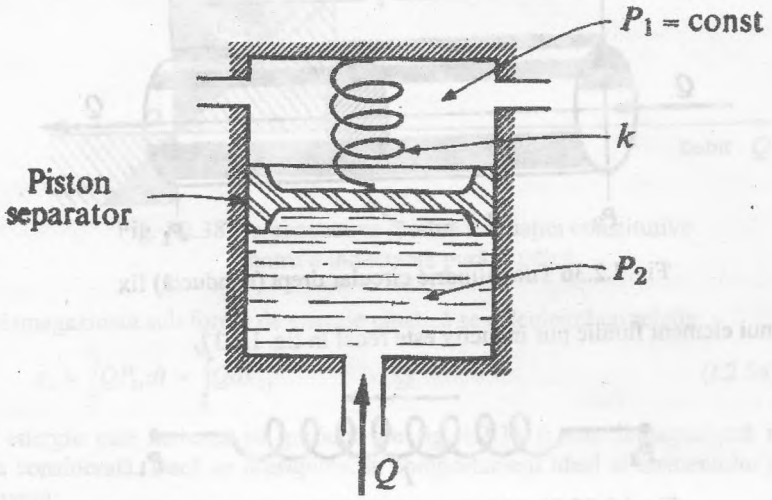


Fig. I.2.34 Acumulator cu piston și resort elastic

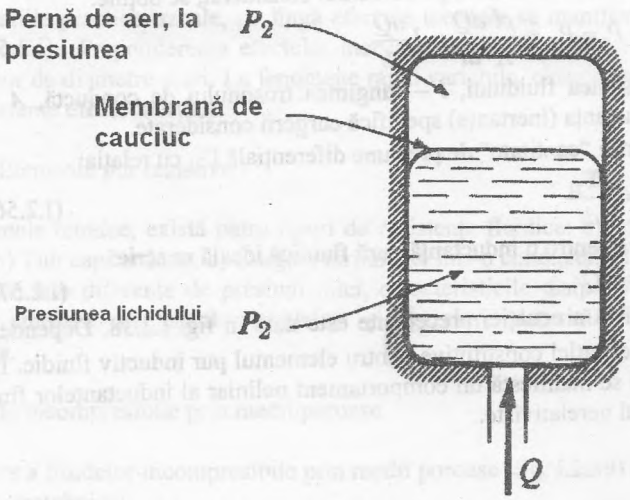


Fig. I.2.35 Acumulator hidro-pneumatic

În ambele cazuri înmagazinarea energiei potenţiale se face pe seama unor elemente elastice: în varianta cu piston şi resort elastic, elementul este mecanic, iar în varianta hidropneumatică, elementul este o pernă de aer.

I.2.4.2. Elemente pur inductive

Inductanţa unui element fluidic este asociată fenomenelor inerţiale, la curgerea prin conducte sau dispozitive. Se consideră o mişcare nestaţionară, fără frecare, a unui lichid incompresibil printr-un tub cilindric circular drept (conductă) fix, sau în mişcare uniformă (fig. I.2.36).

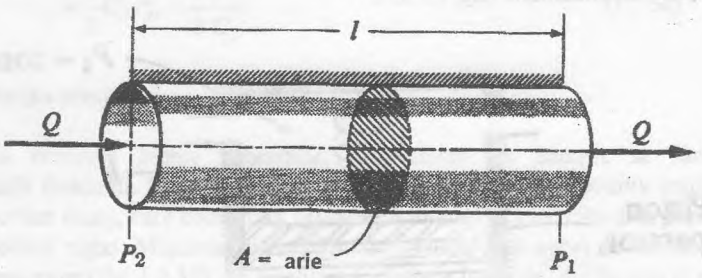


Fig. I.2.36 Tub cilindric circular drept (conductă) fix

Simbolul unui element fluidic pur inductiv este redat în fig. I.2.37.

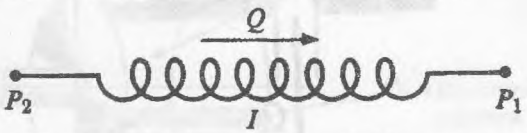


Fig. I.2.37 Simbolul unui element fluidic pur inductiv

Aplicând principiul II al dinamicii, pe domeniul considerat, se obţine:

$$P_2 - P_1 = P_{21} = \frac{\rho l}{A}\frac{dQ}{dt} = I\frac{dQ}{dt} \qquad \text{(I.2.55)}$$

unde: ρ este densitatea fluidului, l – lungimea trosonului de conductă, A – aria secţiunii conductei, I – inductanţa (inertanţa) specifică curgerii considerate.
Se defineşte mărimea "cantitate" de presiune diferenţială Γ_{21} cu relaţia:

$$P_{21} = \frac{d\Gamma_{21}}{dt} \qquad \text{(I.2.56)}$$

Ecuaţia constitutivă pentru o inductanţă pură fluidică ideală se scrie:

$$\Gamma_{21} = IQ \qquad \text{(I.2.57)}$$

Reprezentarea grafică a ecuaţiei precedente este dată în fig. I.2.38. Dependenţa $\Gamma_{21} = f(Q)$ este generalizarea ecuaţiei constitutive pentru elementul pur inductiv fluidic. În practică, sunt rare situaţiile când se manifestă un comportament neliniar al inductanţelor fluidice, deoarece mişcările sunt uzual nerelativiste.

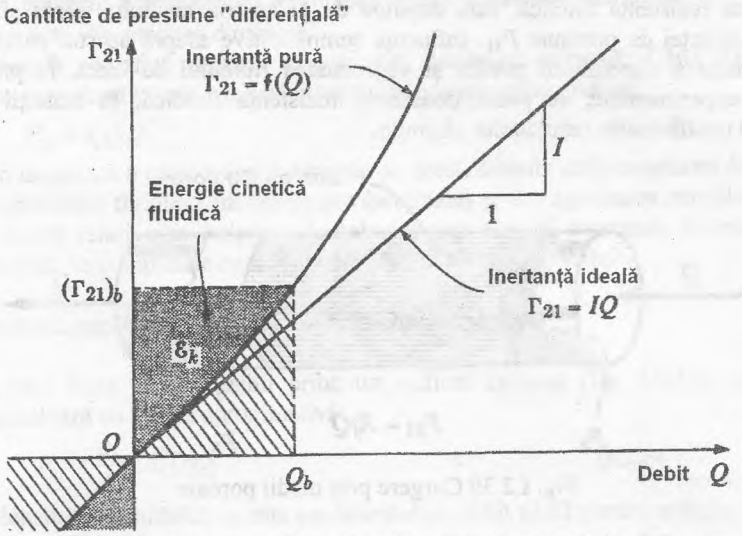


Fig. I.2.38 Reprezentarea grafică a ecuației constitutive pentru o inductanță pură fluidică

Energia înmagazinată sub formă de energie cinetică se calculează cu relația:

$$\varepsilon_k = \int_{t_a}^{t_b} QP_{21}dt = \int_{0}^{Q_b} Qd\Gamma_{21} \qquad \text{(I.2.58)}$$

Această energie este marcată pe graficul din fig. I.2.38 şi este înmagazinată reversibil în conducta considerată. Dacă se presupune un comportament ideal al elementului pur inductiv studiat, avem:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}IQ^2 = \frac{1}{2}\frac{\Gamma_{21}^2}{I} \qquad \text{(I.2.59)}$$

În aplicațiile practice uzuale, pe lîngă efectele inerțiale se manifestă şi fenomene de frecare semnificative. Preponderența efectelor inerțiale survine în mişcări nestaționare şi în cazul conductelor de diametre mari. La fenomene rapid variabile, chiar şi în tuburi capilare se manifestă importante efecte inerțiale.

I.2.4.3. Elemente pur rezistive

În sistemele tehnice, există patru tipuri de rezistențe fluidice: a) Mediu poros, de tip cartuş filtrant; b) Tub capilar lung; c) Curgere turbulentă într-o conductă; d) Orificiu calibrat.

În curgeri sub diferențe de presiuni mici, caracteristicile disipative ale rezistențelor fluidice sunt similare în cazul lichidelor şi gazelor, datorită reducerii efectelor compresibilității.

a) Curgere fluide incompresibile prin medii poroase

Legea de curgere a fluidelor incompresibile prin medii poroase (fig. I.2.39) este analoagă legii lui Ohm din electrotehnică:

$$P_{21} = R_f Q \qquad \text{(I.2.60)}$$

unde: R_f este rezistenţa fluidică, care depinde de geometria mediului poros şi deseori de mărimea diferenţei de presiune P_{21}. Influenţe semnificative asupra acestui parametru au şi mărimea medie a dimensiunii porilor şi vâscozitatea fluidului de lucru. În practică, prin măsurători experimentale, se poate determina rezistenţa fluidică, în condiţii date, care influenţează credibilitatea rezultatelor obţinute.

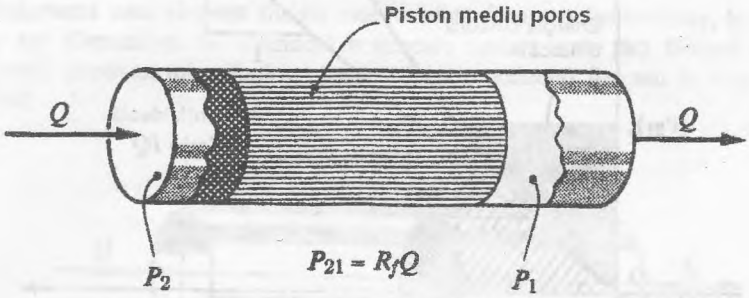


Fig. I.2.39 Curgere prin medii poroase

b) Curgere laminară fluide incompresibile prin tub capilar lung

Curgerea laminară a fluidelor incompresibile prin tuburi capilare lungi (fig. I.2.40) este de tip Hagen-Poiseuille şi este valabilă ecuaţia funcţională:

$$P_{21} = R_f Q \qquad \text{(I.2.61)}$$

unde: R_f este rezistenţa fluidică, calculată cu expresia $R_f = \frac{128\eta l}{\pi d^4}$, în care η este vâscozitatea dinamică, l este lungimea tubului, d – diametrul interior al capilarului.

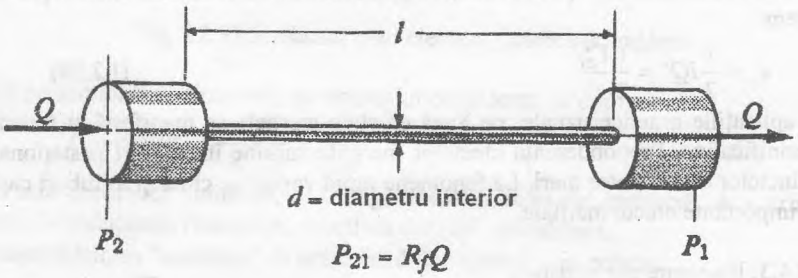


Fig. I.2.40 Tuburi capilare lungi

Pentru a neglija efectele de curgere neuniformă, accelerată din vecinătatea intrării în tub, acesta trebuie să fie lung, raportat la aria sa, iar gradienţii de modificare a debitului de curgere trebuie să fie suficient de mici, pentru a neglija efectele inerţiale.

c) Curgere turbulentă fluide incompresibile prin conducte lungi

În regim turbulent de curgere, avem:

$$\mathrm{Re} = \frac{4\rho Q}{\pi d \eta} > 2000 \qquad \text{(I.2.62)}$$

unde: Re este numărul adimensional Reynolds, ρ este densitatea lichidului, d – diametrul conductei, iar η este vâscozitatea dinamică.

Relația funcțională specifică curgerii se schimbă, devenind neliniară. Când Re > 5000, turbulența este dezvoltată și este valabilă următoarea ecuație aproximativă:

$$P_{21} = a_t Q|Q|^{3/4} \qquad \text{(I.2.63)}$$

unde: a_t este o constantă a cărei valoare depinde de debit, dimensiunile conductei (lungime și diametru), proprietățile fluidului (densitate și vâscozitate) și de rugozitatea pereților interiori ai conductei. Există relații semi-empirice de calcul pentru această constantă, dar este necesar ca determinările să fie completate cu măsurători (calibrări) experimentale.

d) Curgere fluid incompresibil printr-un orificiu calibrat

La curgerea unui fluid incompresibil printr-un orificiu calibrat (fig. I.2.41), căderea de presiune se calculează cu relația aproximativă:

$$P_{21} = \frac{\rho}{2} c_d^2 A_0^2 Q|Q| \qquad \text{(I.2.64)}$$

unde: ρ este densitatea lichidului, c_d este coeficientul de debit (0.62 pentru orificiu cu muchie vie), A_0 este aria orificiului.

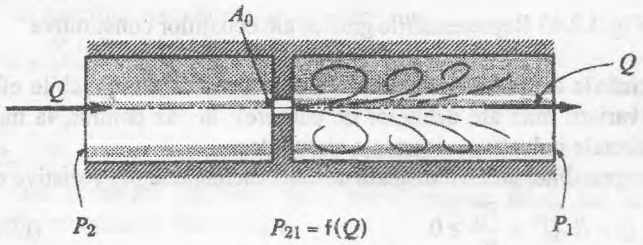


Fig. I.2.41 Orificiu calibrat

Generalizând aspectele funcționale, pentru cele patru tipuri de rezistențe fluidice, se definește ecuația constitutivă specifică elementelor pur rezistive:

$$Q = f(P_{21}) \qquad \text{(I.2.65)}$$

În cazul elementelor pur rezistive ideale, avem:

$$Q = \frac{1}{R_f} P_{21} \qquad \text{(I.2.66)}$$

În fig. I.2.42 este prezentat simbolul elementelor pur rezistive, iar în fig. I.2.43 sunt date reprezentările grafice ale celor două ecuații constitutive scrise mai sus.

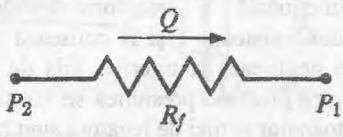


Fig. I.2.42 Simbolul elementelor pur rezistive

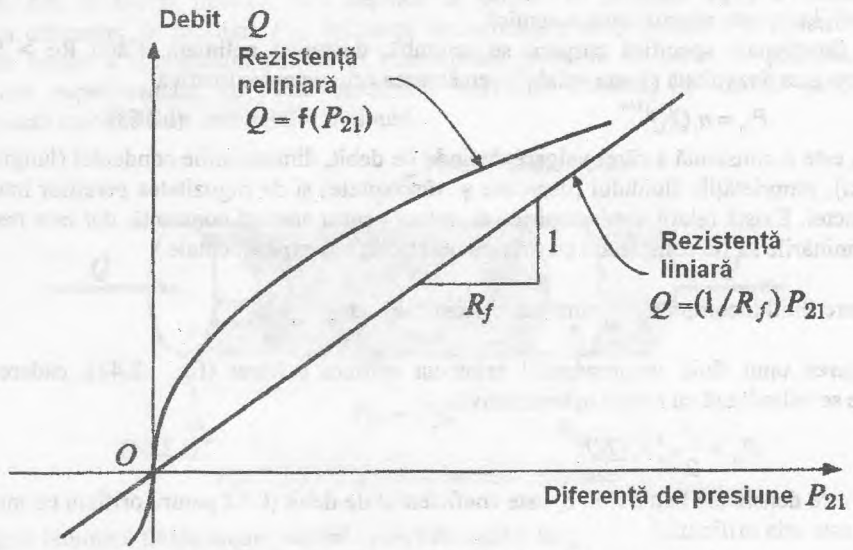


Fig. I.2.43 Reprezentările grafice ale ecuaţiilor constitutive

Toate precizările anterioare sunt valabile doar dacă sunt neglijabile efectele inerţiale ale curgerilor (la variaţii mici ale debitelor de curgere); în caz contrar, la modelare trebuie luate în calcul şi efectele inductive – inertanţa circuitelor.
Pentru fluide incompresibile, puterea disipată de către elementele pur rezistive este:

$$P = P_{21}Q = R_f Q^2 = \frac{P_{21}^2}{R_f} \geq 0 \qquad \text{(I.2.67)}$$

Ca şi în electrotehnică, pentru o porţiune de circuit şi o conductă plină cu lichid aflat în mişcare sub un anumit gradient de presiune poate fi modelată printr-o combinaţie de elemente pur capacitive, inductive şi rezistive, în funcţie de regimul de funcţionare.

I.2.4.4. Elemente pur transformatoare

Transformatorul pur hidraulic transmite integral puterea (energia) de la intrare la ieşire, fiind caracterizat de un parametru – raportul presiunilor ieşire/intrare. În mod implicit, există un raport asociat al volumelor (debitelor) de lichid vehiculate, valorile acestor parametri fiind constante în domeniul de funcţionare, pentru transformatoarele ideale.

Structura constructiv-funcţională a transformatoarelor hidraulice simple este prezentată în fig. I.2.44. Cele două pistoane I şi II culisează fără frecare, iar prin jocurile funcţionale piston – cilindru se neglijează scurgerile. Tija de legătură dintre pistoane este perfect rigidă, iar în camera dintre pistoane presiunea se consideră ca fiind cea a mediului ambiant. Deasemenea, masa pistoanelor şi tijei de legătură sunt neglijabile.

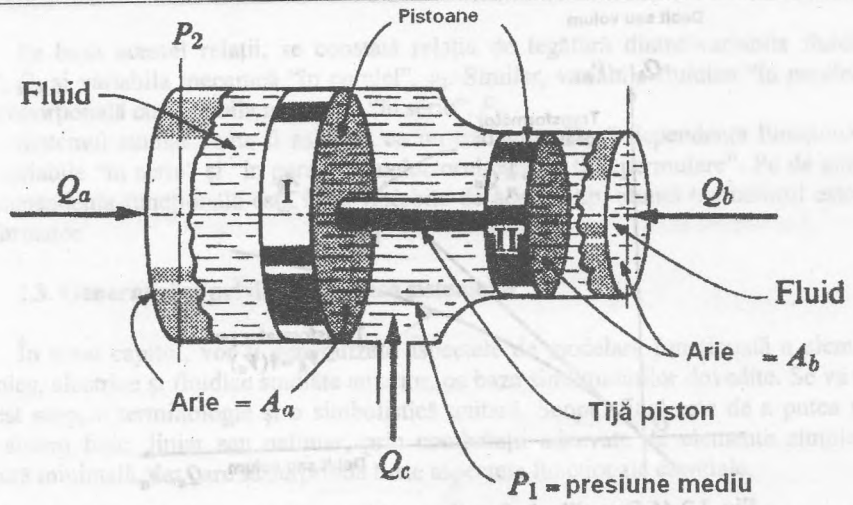


Fig. I.2.44 Structura constructiv-funcțională a transformatoarelor hidraulice simple

Relațiile de calcul specifice transformatorului ideal sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{P_{41}}{P_{21}} = \dfrac{P_4 - P_1}{P_2 - P_1} = \dfrac{A_a}{A_b} = n \\ \dfrac{Q_b}{Q_a} = \dfrac{V_b}{V_a} = -\dfrac{A_b}{A_a} = -\dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{I.2.68}$$

În fig. I.2.45 este prezentat simbolul unui transformator ideal, iar în fig. I.2.46 sunt reprezentate grafic ecuațiile de funcționare.

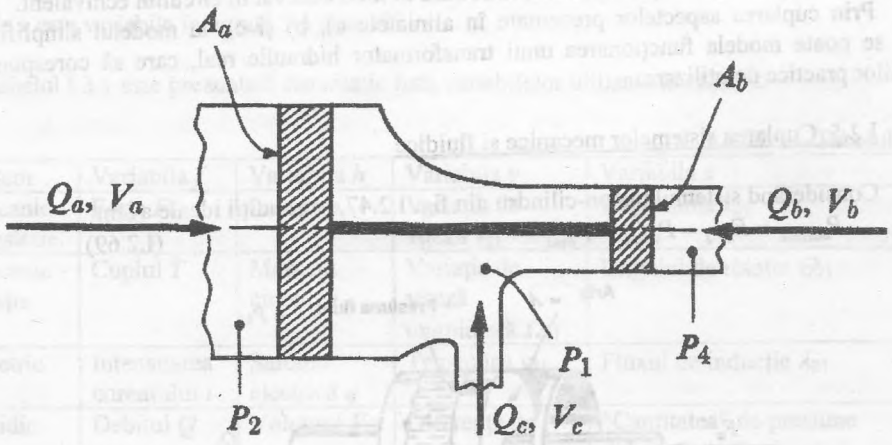


Fig. I.2.45 Simbolul unui transformator ideal

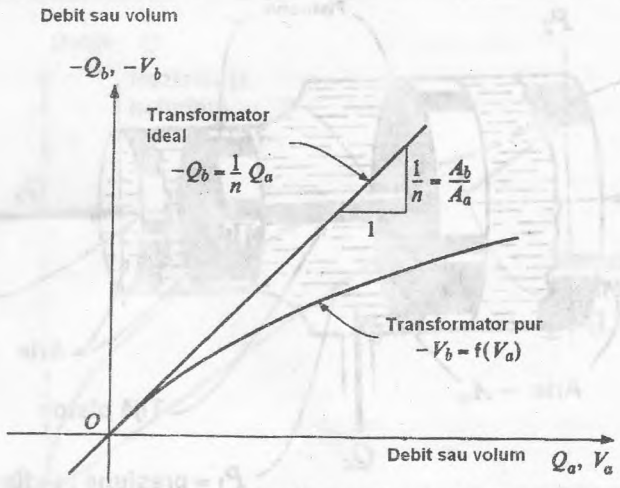


Fig. I.2.46 Ecuaţiile de funcţionare ale transformatorului ideal

În cele ce urmează, se analizează calitativ influenţa unor factori constructiv-funcţionali reprezentativi asupra comportamentului transformatorului hidraulic:

a) Dacă se ia în considerare masa pistoanelor şi a tijei de legătură, inerţia sistemului creşte şi dinamica funcţionării poate fi modelată prin introducerea unei inductanţe hidraulice în circuitul echivalent.

b) Dacă tija de legătură este elastică, acest fapt poate fi modelat prin intermediul unui element elastic (resort), introdus în circuitul echivalent sub forma unei capacităţi hidraulice.

c) În condiţiile în care există scurgeri sau frecări mecanice între pistoane şi cilindri, acestea pot fi modelate prin rezistenţe hidraulice, introduse în mod adecvat în circuitul echivalent.

Prin cuplarea aspectelor prezentate în aliniatele a), b) şi c), la modelul simplificat ideal, se poate modela funcţionarea unui transformator hidraulic real, care să corespundă situaţiilor practice de utilizare.

I.2.5. Cuplarea sistemelor mecanice şi fluidice

Considerând sistemul piston-cilindru din fig. I.2.47, în condiţii ideale avem:

$$P_{mecanic} = F_a v_2 = P_4 Q_b = P_{fluid} \qquad (I.2.69)$$

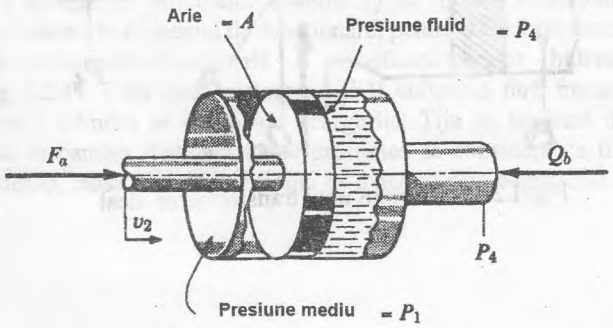


Fig. I.2.47 Sistem piston-cilindru

Pe baza acestei relații, se constată relația de legătură dintre variabila fluidică "în serie", Q_b, și variabila mecanică "în paralel", v_2. Similar, variabila fluidică "în paralel", P_{41}, este proporțională cu variabila mecanică "în serie", F_a.

Sistemul studiat poate fi asimilat cu un traductor. Dacă dependența funcțională este între variabile "în serie" și "în paralel", traductorul este de tip „permutare". Pe de altă parte, dacă dependența funcțională este între variabile de același tip, atunci traductorul este de tip transformator.

I.3. Generalizări privind dinamica sistemelor

În acest capitol, vor fi generalizate aspectele de modelare funcțională a elementelor mecanice, electrice și fluidice studiate anterior, pe baza similitudinilor dovedite. Se va utiliza, în acest scop, o terminologie și o simbolistică unitară. Scopul final este de a putea modela orice sistem fizic, liniar sau neliniar, prin combinații adecvate de elemente simple, cu o structură minimală, dar care să surprindă toate aspectele funcționale esențiale.

I.3.1. Variabile generalizate. Putere și energie

În paragrafele anterioare, am folosit două categorii de variabile: "în serie" și "în paralel", pentru care se folosesc notațiile generalizate: f și v. Aceste mărimi pot fi exprimate ca variații în timp a două variabile asociate:

$$f = \frac{dh}{dt}, \tag{I.3.1}$$

unde h este variabila integrală "în serie";

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{I.3.2}$$

unde x este variabila integrală "în paralel".

În tabelul I.3.1 este prezentată sistematic lista variabilelor utilizate în cap. I.2.

Tabelul I.3.1

Sistem	Variabila f	Variabila h	Variabila v	Variabila x
Mecanic - translație	Forța F	Impuls p	Variația de viteză v_{21}	Deplasarea x_{21}
Mecanic - rorație	Cuplul T	Moment cinetic h	Variația de viteză unghiulară Ω_{21}	Unghiul de rotație Θ_{21}
Electric	Intensitatea curentului i	Sarcina electrică q	Tensiunea v_{21}	Fluxul de inducție λ_{21}
Fluidic	Debitul Q	Volumul V	Diferența de presiune P_{21}	"Cantitatea" de presiune diferențială Γ_{21}

În sens generalizat, puterea care circulă printr-un element sau sistem, între două puncte 1 și 2, este:

$$P = fv_{21}, \tag{I.3.3}$$

iar energia transferată, într-un anumit interval de timp, pe seama puterii menționate:

$$\varepsilon = \int_{t_a}^{t_b} P dt = \int_{t_a}^{t_b} f v_{21} dt \qquad \text{(I.3.4)}$$

I.3.2. Elemente cu două terminale - unic flux energetic

Un element (sistem) care poate fi definit funcţional prin dependenţa dintre o variabilă "în serie", f şi una "în paralel", v_{21} este numit ca având "două terminale" (fig. I.3.1).

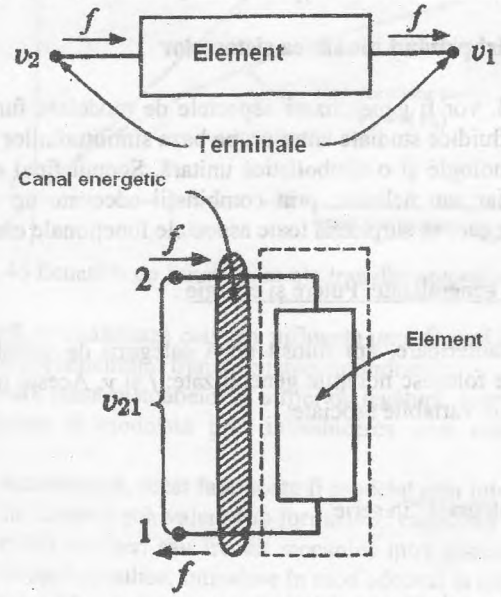


Fig. I.3.1 Element (sistem) cu "două terminale"

Deoarece, fluxul energetic printr-un astfel de element depinde de cele două variabile menţionate (de obicei, de produsul lor), sistemul mai poate fi considerat ca având "unic flux energetic" (fig. I.3.1).

În funcţie de variabila care determină fluxul energetic, avem mai multe tipuri reprezentative de elemente simple: pur inductive "în serie" – inductanţe generalizate; pur capacitive "în paralel" – condensatoare generalizate; pur "disipative" – rezistenţe generalizate; pur generatoare "în serie" şi "în paralel" – surse de energie.

I.3.2.1. Elemente pur inductive "în serie" – inductanţe generalizate

Exemple de elemente pur inductive "în serie" – inductanţe generalizate sunt: resoarte elastice de translaţie şi de rotaţie, bobine electrice şi inertanţe fluidice. Pentru un element de acest tip, cu terminalele 1 şi 2, ecuaţia funcţională se scrie:

$$x_{21} = \varphi(f), \qquad \text{(I.3.5)}$$

unde: φ este o funcţie de o singură variabilă.

Dacă elementul este ideal (liniar), ecuaţia funcţională devine:

$$x_{21} = Lf, \qquad \text{(I.3.6)}$$

iar dacă L este o constantă:

$$v_{21} = \frac{dx_{21}}{dt} = L\frac{df}{dt}, \tag{I.3.7}$$

unde: L este inductanța generalizată. De ex.: pentru resoarte ideale, L este constanta elastică, iar pentru elemente fluide ideale, L este inertanța.
Energia înmagazinată de elementele pur inductive "în serie" este:

$$\varepsilon = \int_{t_a}^{t_b} f v_{21} dt = \int_0^f f dx_{21}, \tag{I.3.8}$$

care în cazul unui element ideal se scrie:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} L f^2 = \frac{1}{2}\frac{x_{21}^2}{L} \tag{I.3.9}$$

I.3.2.2. Elemente pur capacitive "în paralel" – condensatoare generalizate

Exemple de elemente pur capacitive "în paralel" – condensatoare generalizate sunt: mase în mişcare de translaţie şi de rotaţie, condensatoare electrice şi capacităţi fluidice. Pentru un element de acest tip, cu terminalele 1 şi 2, ecuaţia funcţională se scrie:

$$h = \varphi(v_{21}), \tag{I.3.10}$$

unde: φ este o funcţie de o singură variabilă.
Dacă elementul este ideal (liniar), ecuaţia funcţională devine:

$$h = Cv_{21}, \tag{I.3.11}$$

iar dacă C este o constantă:

$$f = \frac{dh}{dt} = C\frac{dv_{21}}{dt}, \tag{I.3.12}$$

unde: C este condensatorul generalizat. De ex.: pentru mase ideale, C este masa sau momentul de inerţie, iar pentru elemente fluide ideale, C este capacitatea.
Energia înmagazinată de elementele pur capacitive "în paralel" este:

$$\varepsilon = \int_{t_a}^{t_b} v_{21} f dt = \int_0^{v_{21}} v_{21} dh, \tag{I.3.13}$$

care în cazul unui element ideal se scrie:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} C v_{21}^2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{C} \tag{I.3.14}$$

I.3.2.3. Elemente pur "disipative" – rezistenţe generalizate

Exemple de elemente pur "disipative" – rezistenţe generalizate – condensatoare generalizate sunt: elemente de frecare, în mişcare de translaţie şi de rotaţie, rezistenţe electrice şi fluidice. Pentru un element de acest tip, cu terminalele 1 şi 2, ecuaţia funcţională se scrie:

$$f = \varphi(v_{21}), \tag{I.3.15}$$

unde: φ este o funcţie de o singură variabilă.
Dacă elementul este ideal (liniar), ecuaţia funcţională devine:

$$f = \frac{1}{R} v_{21}, \tag{I.3.16}$$

unde: R este rezistenţa generalizată. De ex.: pentru elemente de frecare, în mişcare de translaţie şi de rotaţie, R este echivalentul coeficientului de frecare, iar pentru elemente fluide ideale, R este rezistenţa.

Puterea absorbită din sistem, de către elementele pur "disipative" este:

$$P = fv_{21} = v_{21}\varphi(v_{21}), \tag{I.3.17}$$

care în cazul unui element ideal se scrie:

$$P = f^2R = \frac{v_{21}^2}{R} \tag{I.3.18}$$

I.3.2.4. Elemente pur generatoare "în serie" şi "în paralel" – surse de energie

Cele două categorii de surse de energie pot fi simbolizate ca în fig. I.3.2.

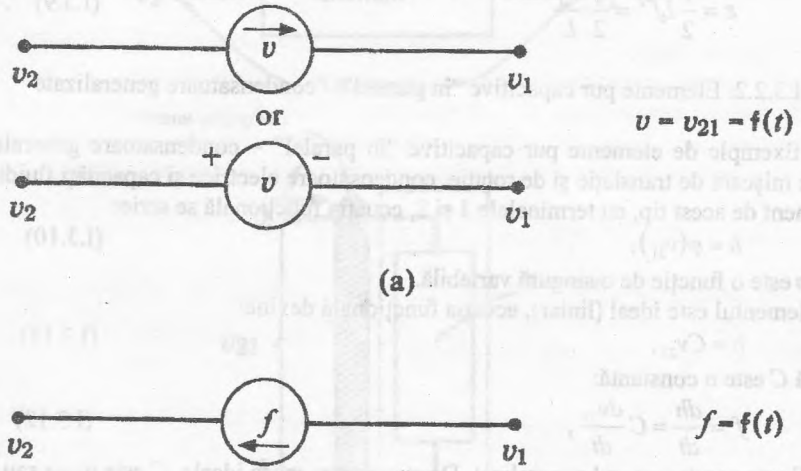


Fig. I.3.2 Simbolurile celor două categorii de surse de energie

Pentru toate sursele de energie, puterea debitată este:

$$P = fv_{21} \tag{I.3.19}$$

Exemple de surse de energie utilizate în practică sunt date în tabelul I.3.2.

Tabelul I.3.2

Sursa	Suportul fizic al energiei	Tipul sursei de energie
Baterie auto	Tensiune electrică	"în paralel"
Pompă hidraulică	Debit de lichid	"în serie"
Motor de cuplu	Cuplu mecanic	"în serie"
Adâncimea unui rezervor	Presiune	"în paralel"

I.3.2.5. Schematizarea rezumativă a elementelor cu două terminale - unic flux energetic

Ecuaţiile funcţionale generalizate ale elementelor cu două terminale - unic flux energetic şi schematizarea lor rezumativă sunt redate în fig. I.3.3. Interpretarea acestei scheme este uşor de parcurs, dacă sunt urmărite detaliile prezentate în paragrafele anterioare.

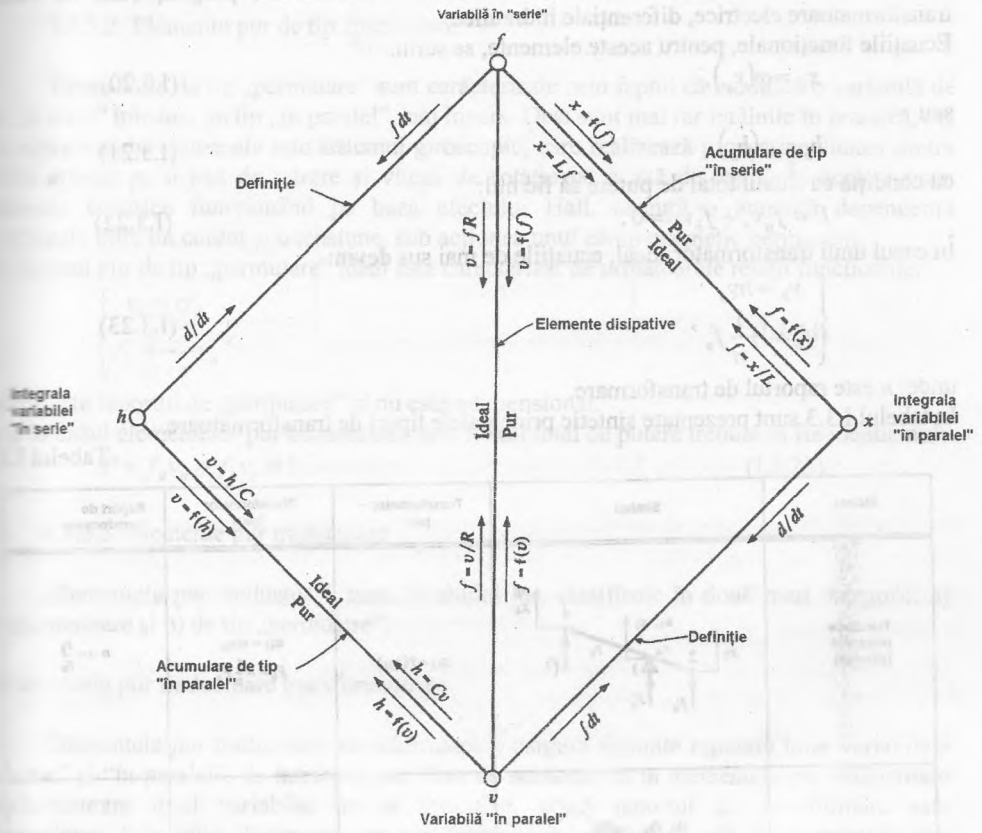


Fig. I.3.3 Schematizarea rezumativă a ecuațiilor funcționale generalizate ale elementelor cu două terminale - unic flux energetic

I.3.3. Elemente cu patru terminale - dublu flux energetic

Un element (sistem) care poate fi definit funcțional prin dependența dintre două perechi de variabile "în serie", f și "în paralel", v_{21} este numit ca având "patru terminale". Sistemul poate fi considerat ca având "dublu flux energetic", deoarece schimburi energetice se produc la fiecare dintre cele două perechi de terminale.
În funcție de mai multe criterii, care vor fi detaliate succesiv, avem mai multe tipuri reprezentative de elemente cu patru terminale - dublu flux energetic: transformatoare, de tip „permutare", traductoare.

I.3.3.1. Elemente pur transformatoare

Elementele pur transformatoare asigură anumite rapoarte între variabilele "în serie" și "în paralel", de intrare-ieșire, astfel încât fluxul total de putere prin aceste dispozitive să fie identic nul. Este de subliniat că în elementele pur transformatoare tipul variabilei nu se modifică, adică raportul de transformare este adimensional. Câteva exemple practice de astfel

de sisteme sunt: scripeți, sisteme de direcție la autovehicule, pârghii, cutii de viteză, transformatoare electrice, diferențiale hidraulice.

Ecuațiile funcționale, pentru aceste elemente, se scriu:

$$x_b = \varphi(x_a), \tag{I.3.20}$$

sau

$$h_b = \varphi(h_a), \tag{I.3.21}$$

cu condiția ca fluxul total de putere să fie nul:

$$P = f_a v_a + f_b v_b = 0. \tag{I.3.22}$$

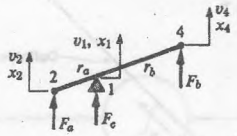
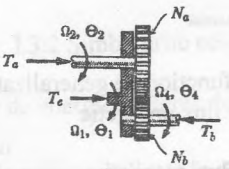
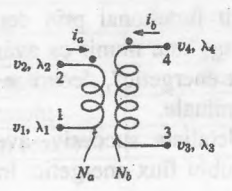
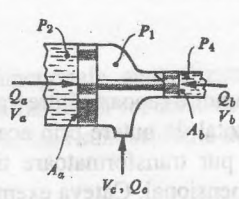
În cazul unui transformator ideal, ecuațiile de mai sus devin:

$$\begin{cases} v_b = n v_a \\ f_b = -\dfrac{1}{n} f_a \end{cases}, \tag{I.3.23}$$

unde: n este raportul de transformare.

În tabelul I.3.3 sunt prezentate sintetic principalele tipuri de transformatoare.

Tabelul I.3.3

Sistem	Simbol	Transformator pur	Transformator ideal	Raport de transformare
Translație mecanică (pârghie)		$x_{41} = f(x_{21})$	$v_{41} = n v_{21}$ $F_b = -\frac{1}{n} F_a$	$n = -\frac{r_b}{r_a}$
Rotație mecanică (angrenaje)		$\Theta_{41} = f(\Theta_{21})$	$\Omega_{41} = n\Omega_{21}$ $T_b = -\frac{1}{n} T_a$	$n = -\frac{N_a}{N_b}$
Electric (magnetic)		$\lambda_{43} = f(\lambda_{21})$	$v_{43} = n v_{21}$ $i_b = -\frac{1}{n} i_a$	$n = \frac{N_b}{N_a}$
Fluidic (piston diferențial)		$V_b = f(V_a)$	$P_{41} = nP_{21}$ $Q_b = -\frac{1}{n} Q_a$	$n = \frac{A_a}{A_b}$

I.3.3.2. Elemente pur de tip „permutare"

Elementele de tip „permutare" sunt caracterizate prin faptul că modifică o variabilă de tip „în serie" într-una de tip „în paralel", sau invers. Deşi sunt mai rar întâlnite în practică, cel mai reprezentativ dintre ele este sistemul giroscopic, care realizează proporţionalitatea dintre cuplul aplicat pe o axă de intrare şi viteza de rotaţie pe o axă de ieşire. În acelaşi sens, sistemele electrice funcţionând pe baza efectului Hall, asigură o anumită dependenţă funcţională între un curent şi o tensiune, sub acţiunea unui câmp magnetic permanent.
Un element pur de tip „permutare" ideal este caracterizat de următoarele relaţii funcţionale:

$$\begin{cases} v_b = rf_a \\ f_b = -\dfrac{1}{r}v_a \end{cases}, \qquad \text{(I.3.24)}$$

unde: r este raportul de „permutare" şi nu este adimensional.
Ca şi în cazul elementelor pur transformatoare, fluxul total de putere trebuie să fie identic nul:

$$P = f_a v_a + f_b v_b = 0. \qquad \text{(I.3.25)}$$

I.3.3.3. Elemente pur traductoare

Elementele pur traductoare sunt, la rândul lor, clasificate în două mari categorii: a) transformatoare şi b) de tip „permutare".

a) Elementele pur traductoare transformatoare

Elementele pur traductoare transformatoare asigură anumite rapoarte între variabilele "în serie" şi "în paralel", de intrare-ieşire. Este de subliniat că în elementele pur traductoare transformatoare tipul variabilei nu se modifică, adică raportul de transformare este adimensional. Principiile de funcţionare sunt foarte asemănătoare cu cele ale elementelor pur transformatoare, deosebirea fiind că nu servesc transmiterii de putere (energie), ci măsurării anumitor parametri funcţionali. Exemple de astfel de traductoare sunt: mecanisme cremalieră-roată dinţată, termocuple, tahogeneratoare.

b) Elementele pur traductoare de tip „permutare"

Elementele pur traductoare de tip „permutare" sunt caracterizate prin faptul că modifică o variabilă de tip „în serie" într-una de tip „în paralel", sau invers. Este de subliniat că în elementele pur traductoare de tip „permutare" tipul variabilei se modifică, adică raportul de transformare nu este adimensional. Principiile de funcţionare sunt foarte asemănătoare cu cele ale elementelor pur de tip „permutare", deosebirea fiind că nu servesc transmiterii de putere (energie), ci măsurării anumitor parametri funcţionali. Exemple de astfel de traductoare sunt: cristale piezoelectrice, sistem piston-cilindru (vezi fig. I.2.47), studiat la paragraful I.2.5.

I.3.4. Elemente pur de control-modulare

În comparaţie cu cele studiate anterior, sistemele complexe pot avea mai multe fluxuri energetice, nu numai două şi mai multe terminale, nu numai patru. Un exemplu tipic, care acoperă o clasă de aplicaţii reprezentativă, este cel cu trei fluxuri energetice şi şase terminale, care asigură controlul sau modificarea (modularea) fluxului de energie intrare-ieşire, prin

intermediul unui circuit de comandă separat. Varianta funcțională numită element pur de control-modulare nu acumulează-disipă energie, ci asigură numai funcțiunea descrisă mai sus. În fig. I.3.4 este prezentat schematic un asemenea element.

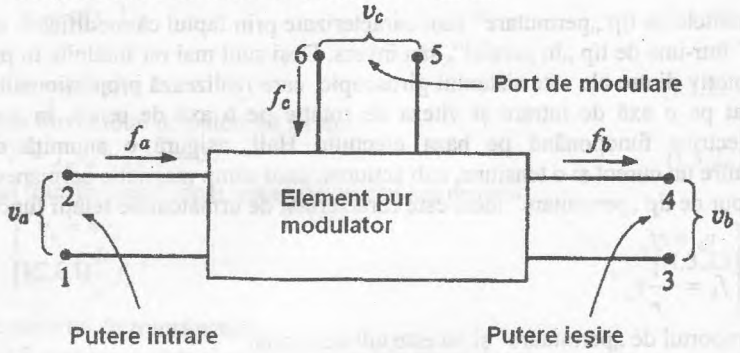


Fig. I.3.4 Element pur de control-modulare

Un dispozitiv de acest tip, disipă în realitate din energia (puterea) de intrare, astfel încât:

$$\wp_a + \wp_c > \wp_b, \qquad \text{(I.3.26)}$$

unde: $\wp_a$ este puterea la intrare, $\wp_b$ este puterea la ieşire, iar $\wp_c$ este puterea pe canalul de comandă. Deseori: $\wp_c << \wp_{a,b}$.

La intrare şi la ieşire, natura fizică a fenomenelor este identică şi diferă uneori de cea de pe canalul de comandă. Din punct de vedere informațional, când $\wp_c$ este considerat semnalul de intrare, iar $\wp_b$ (puterea modulată) este semnalul de ieşire, sistemul se numeşte amplificator.

Exemple practice de elemenete pur de control-modulare sunt: tuburile catodice, tranzistoarele, cuplajele hidraulice, potențiometrele variabile, releele electrice, robineții de modificare a debitului de lichid.

Un robinet tipic de reglare a debitului de lichid este prezentat în fig. I.3.5.

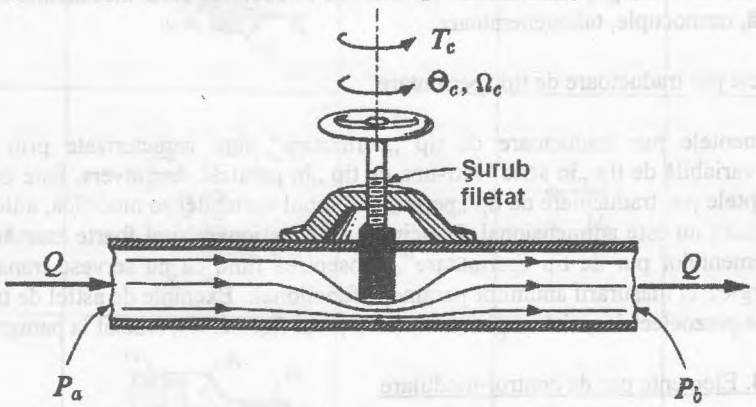


Fig. I.3.5 Robinet tipic de reglare a debitului de lichid

Puterile hidraulice, pe traseele de intrare-ieşire ale lichidului sunt:

$$\begin{cases} \wp_a = QP_a \\ \wp_b = QP_b < \wp_a \end{cases} \qquad \text{(I.3.27)}$$

Puterea pe canalul de comandă se scrie:

$$\wp_c = \Omega_c T_c << \wp_a, \qquad \text{(I.3.28)}$$

în regim normal de funcționare, nu la deschideri foarte mici ale robinetului.

Robinetul poate fi modelat ca o rezistență hidraulică variabilă, a cărei ecuație funcțională este:

$$P_a - P_b = R_f Q, \qquad \text{(I.3.29)}$$

unde: R_f depinde de poziția sertarului de reglare – șurubului, solidar cu roata de acționare a robinetului.

I.3.5. Schematizare rezumativă a bilanțului energetic (de putere) pentru elemente tip de circuit

Elementele tip de circuit pot fi clasificate, în funcție de bilanțul energetic (de putere), în următoarele categorii: acumulatoare ($\varepsilon \geq 0$); disipative ($P > 0$); surse ($P >$ sau < 0); transformatoare ($P = 0$); modulatoare.

În fig. I.3.6 este prezentată o schemă rezumativă a categoriilor de elemente tip de circuit, în funcție de bilanțul energetic (de putere), specific clasificării anterioare.

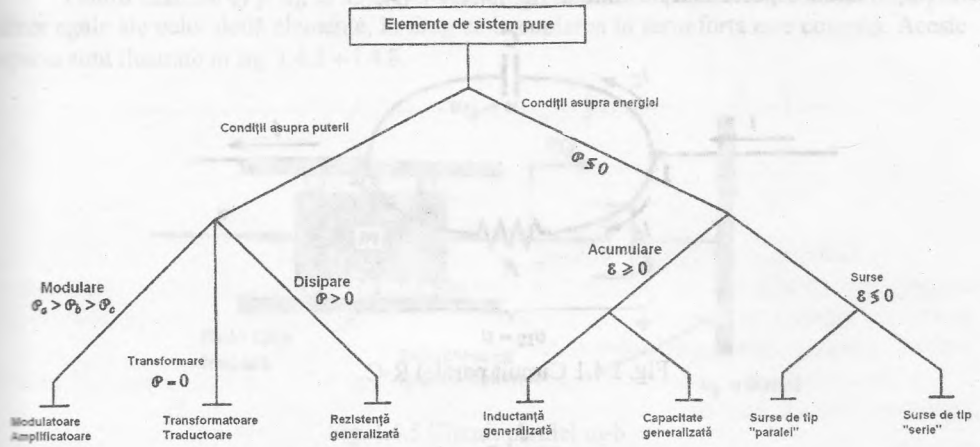


Fig. I.3.6 Schemă rezumativă a categoriilor de elemente tip de circuit, în funcție de bilanțul energetic (de putere)

I.4. Modelarea dinamicii sistemelor

Studiul dinamicii unui sistem presupune elaborarea unui model matematic aproximativ, dar cât mai exact, pentru configuraţia sa constructiv-funcţională, definită corepunzător. Elementele tip ideale studiate anterior, sunt asociate unor aproximări matematice ale comportamentului lor real, în anumite condiţii specifice de funcţionare. Gruparea unor astfel de elemente simple permite caracterizarea realistă a comportamentului unui sistem complex, cu un număr mare de condiţionări funcţionale. Această combinaţie este denumită model. Pragmatic, modelul face un compromis între gradul său de complexitate şi acurateţea cu care descrie comportamentul real al sistemului studiat.

I.4.1. Formularea sistemului de ecuaţii al modelului

În această etapă, vor fi analizate cele mai simple modele, formate din perechi de elemente ideale, cu un element care înmagazinează şi unul care disipă energie.
Vor fi analizate patru situaţii reprezentative: a) Rezistenţă şi condensator electrice; b) Rezistenţă şi inductanţă electrice; c) Masă şi element de frecare mecanice şi d) Resort elastic şi element de frecare mecanice, în combinaţiile posibile serie-paralel.

Pentru cazurile a) şi b), în circuite electrice, cuplarea în paralel este caracterizată prin tensiune egală la bornele celor două elemente, în timp ce la cuplarea în serie curentul electric este acelaşi. Aceste aspecte sunt ilustrate în fig. I.4.1 ÷ I.4.4.

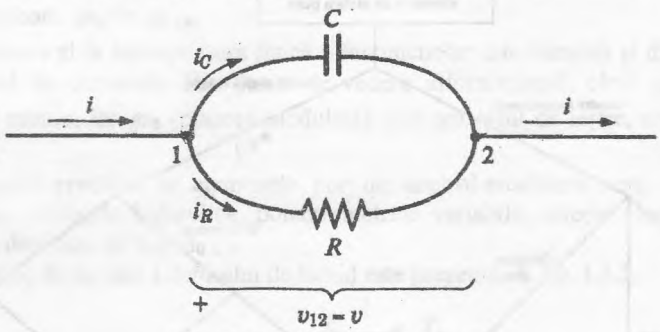


Fig. I.4.1 Circuit paralel R-C

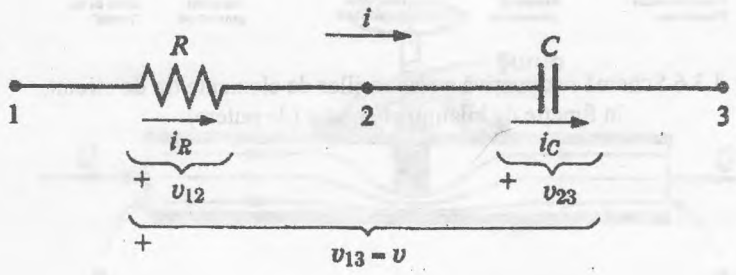


Fig. I.4.2 Circuit serie R-C

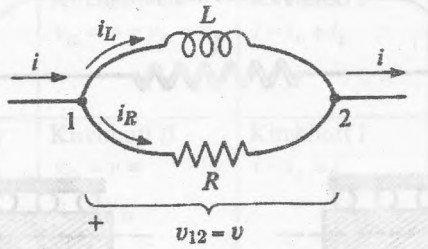


Fig. I.4.3 Circuit paralel R-L

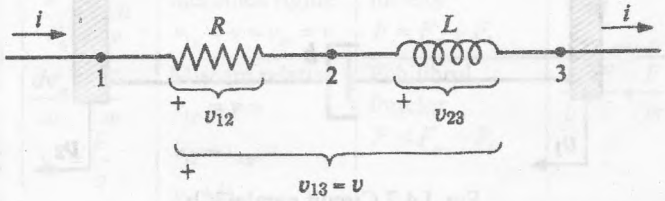


Fig. I.4.4 Circuit serie R-L

Pentru cazurile c) și d), în aplicații mecanice, cuplarea în paralel este caracterizată prin viteze egale ale celor două elemente, în timp ce la cuplarea în serie forța este comună. Aceste aspecte sunt ilustrate în fig. I.4.5 ÷ I.4.8.

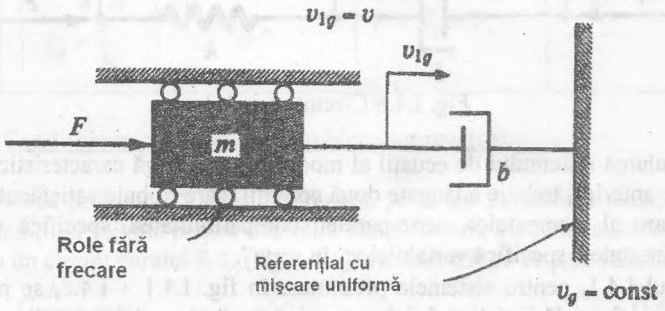


Fig. I.4.5 Circuit paralel m-b

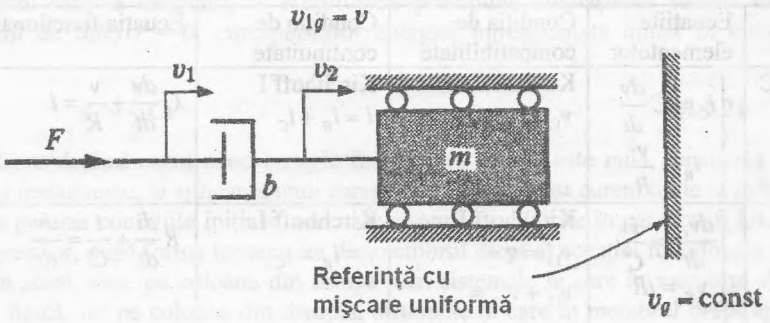


Fig. I.4.6 Circuit serie m-b

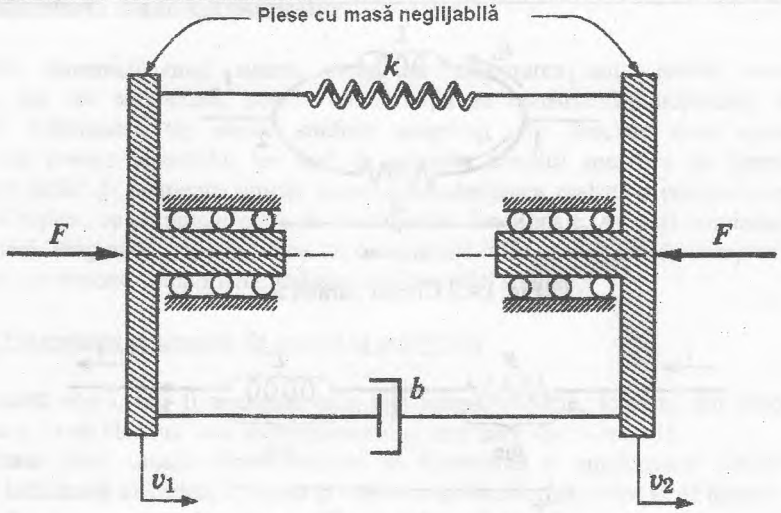


Fig. I.4.7 Circuit paralel k-b

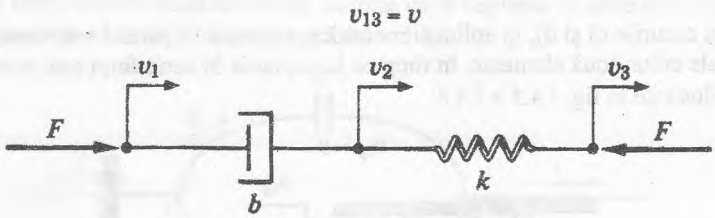


Fig. I.4.8 Circuit serie k-b

În formularea sistemului de ecuaţii al modelului, pe lângă caracteristicile elementelor simple, studiate anterior, trebuie adăugate două condiţii, care trebuie satisfăcute, în funcţie de modul de cuplare al elementelor, serie-paralel: compatibilitatea, specifică variabilelor „în paralel" şi continuitatea, specifică variabilelor „în serie".

În tabelul I.4.1, pentru sistemele prezentate în fig. I.4.1 ÷ I.4.8, se prezintă sintetic aspectele specifice formulării sistemului de ecuaţii al fiecărui model de studiu.

Tabelul I.4.1

Sistem	Ecuaţiile elementelor	Condiţia de compatibilitate	Condiţia de continuitate	Ecuaţia funcţională
Paralel R-C	$\begin{cases} i_C = C\dfrac{dv}{dt} \\ i_R = \dfrac{v}{R} \end{cases}$	Kirchhoff II $v_{12} = v = v_R = v_C$	Kirchhoff I $i = i_R + i_C$	$C\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{R} = i$
Serie R-C	$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{i}{C} \\ v_R = iR \end{cases}$	Kirchhoff II $v_{13} = v =$ $v_{12} + v_{23} =$ $v_R + v_C$	Kirchhoff I $i = i_R = i_C$	$R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} = \dfrac{dv}{dt}$

Paralel R-L	$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{L} \\ i_R = \frac{v}{R} \end{cases}$	Kirchhoff II $v_{12} = v = v_R = v_L$	Kirchhoff I $i = i_R + i_L$	$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = \frac{di}{dt}$
Serie R-L	$\begin{cases} v_L = L\frac{di}{dt} \\ v_R = iR \end{cases}$	Kirchhoff II $v_{13} = v =$ $v_{12} + v_{23} =$ $v_R + v_L$	Kirchhoff I $i = i_R = i_L$	$L\frac{di}{dt} + Ri = v$
Paralel m-b	$\begin{cases} F_m = m\frac{dv}{dt} \\ F_b = bv \end{cases}$	Legătură mecanică rigidă $v_{1g} = v = v_m = v_b$	Echilibrul forțelor $F = F_m + F_b$	$m\frac{dv}{dt} + bv = F$
Serie m-b	$\begin{cases} \frac{dv_m}{dt} = \frac{F}{m} \\ v_b = \frac{F}{b} \end{cases}$	Mişcare relativă $v_{1g} = v =$ $v_{12} + v_{2g} =$ $v_b + v_m$	Echilibrul forțelor $F = F_m = F_b$	$\frac{1}{b}\frac{dF}{dt} + \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$
Paralel k-b	$\begin{cases} \frac{dF_k}{dt} = kv \\ F_b = bv \end{cases}$	Legătură mecanică rigidă $v_{12} = v = v_k = v_b$	Echilibrul forțelor $F = F_k + F_b$	$b\frac{dv}{dt} + kv = \frac{dF}{dt}$
Serie k-b	$\begin{cases} v_k = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt} \\ v_b = \frac{F}{b} \end{cases}$	Mişcare relativă $v_{13} = v =$ $v_{12} + v_{23} =$ $v_b + v_k$	Echilibrul forțelor $F = F_k = F_b$	$\frac{1}{k}\frac{dF}{dt} + \frac{F}{b} = v$

I.4.2. Condiţiile iniţiale specifice problemelor practice

Rezolvarea problemelor practice implică pe lângă formularea ecuaţiilor modelului şi precizarea condiţiilor iniţiale pentru mărimile fizice de stare ale sistemului studiat.
De ex. pentru un circuit paralel R-C (fig. I.4.1), caracterizat de ecuaţia funcţională:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i, \qquad \text{(I.4.1)}$$

dacă se pune problema prescrierii unui semnal de curent, i, soluţia obţinută va evidenţia evoluţia în timp a tensiunii, v. Rezolvarea presupune cunoaşterea valorii mărimii v, la momentul de timp $t = 0$, corespunzător energiei înmagazinată iniţial în circuit, pe baza relaţiei:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}Cv^2 \qquad \text{(I.4.2)}$$

Considerând cazul când energia iniţială din circuit este nulă, tensiunea nu se poate modifica instantaneu, la aplicarea unui curent, decât dacă acest curent tinde la infinit.
Pentru a preciza condiţiile iniţiale, adecvate sistemelor studiate în paragraful I.4.1., este utilă clasificarea lor, după forma termenului din membrul drept al ecuaţiei funcţionale (vezi tabelul I.4.2). În acest sens, pe coloana din stânga sunt sistemele la care în membrul drept apare o mărime fizică, iar pe coloana din dreapta, sistemele la care în membrul drept apare derivata temporală a unei mărimi fizice.

Tabelul I.4.2

Forma generală $a_1\frac{dx_e}{dt}+a_0x_e=b_0x_i$ $x_e=0$, la $t=0_+$	Forma generală $a_1\frac{dx_e}{dt}+a_0x_e=b_1\frac{dx_i}{dt}$ $x_e=\frac{b_1}{a_1}x_i\Big\vert_0$, la $t=0_+$
Paralel R-C $C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=i$ $v=0$, la $t=0_+$	Serie R-C $R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{dv}{dt}$ $i=\frac{1}{R}v\Big\vert_0$, la $t=0_+$
Paralel m-b $m\frac{dv}{dt}+bv=F$ $v=0$, la $t=0_+$	Serie m-b $\frac{1}{b}\frac{dF}{dt}+\frac{F}{m}=\frac{dv}{dt}$ $F=bv\vert_0$, la $t=0_+$
Serie R-L $L\frac{di}{dt}+Ri=v$ $i=0$, la $t=0_+$	Paralel R-L $\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{L}=\frac{di}{dt}$ $v=Ri\vert_0$, la $t=0_+$
Serie k-b $\frac{1}{k}\frac{dF}{dt}+\frac{F}{b}=v$ $F=0$, la $t=0_+$	Paralel k-b $b\frac{dv}{dt}+kv=\frac{dF}{dt}$ $v=\frac{1}{b}F\Big\vert_0$, la $t=0_+$

Condiţiile iniţiale precizate în tabelul I.4.2 corespund următoarelor notaţii şi precizări: x_e este mărimea de ieşire; x_i este mărimea de intrare (prescrierea); sistemul este iniţial relaxat: $x_e = 0$, la $t = 0_-$; la momentul $t = 0_+$ se aplică un semnal de intrare finit.

Pentru sistemele cu forma generală de pe coloana din stânga (vezi tabelul I.4.2), mărimea de ieşire corespunde variabilei pe seama căreia se face înmagazinarea de energie. Circuitele R-C şi m-b conţin elemente de tip "în paralel", iar mărimea de ieşire este o variabilă de tip "în paralel". Circuitele R-L şi k-b conţin elemente de tip "în serie", iar mărimea de ieşire este o variabilă de tip "în serie".

Pentru sistemele cu forma generală de pe coloana din dreapta (vezi tabelul I.4.2), mărimea de ieşire nu corespunde variabilei pe seama căreia se face înmagazinarea de energie. Circuitele R-C şi m-b conţin elemente de tip "în paralel", iar mărimea de ieşire este o variabilă de tip "în serie". Circuitele R-L şi k-b conţin elemente de tip "în serie", iar mărimea de ieşire este o variabilă de tip "în paralel". Mai mult, cu toate că variabila pe seama căreia se face înmagazinarea de energie nu se poate modifica practic instantaneu, condiţiile iniţiale se impun pentru altă mărime fizică. Pentru clarificare, să considerăm circuitul serie R-C, în care: $v_C = 0$, la $t = 0_+$, dar condiţia iniţială trebuie să specifice curentul i, la $t = 0_+$; relaţia precizată în tabelul I.4.2 rezultă din condiţia de compatibilitate: $v = iR + v_C$, cuplată cu condiţia de mai sus: $v_C = 0$, la $t = 0_+$, la care se adaugă semnalul de intrare - prescrierea: $v\vert_0 = v$, la $t = 0_+$.

Notă: Discuţia referitoare la forma generală de pe coloana din drepta a tabelului I.4.2, va fi aplicată formei de pe coloana din stînga, dacă se inversează rolurile: mărimea de intrare devine mărime de ieşire şi mărimea de ieşire devine mărime de intrare.

În concluzie, se pot face următoarele precizări:

a) Variabilele de tip "în paralel", v, ale condensatoarelor generalizate, nu se pot modifica instantaneu decât dacă se aplică o variaţie infinită a variabilei de tip "în serie", f;

b) Variabilele de tip "în serie", f, ale inductanţelor generalizate, nu se pot modifica instantaneu decât dacă se aplică o variaţie infinită a variabilei de tip "în paralel", v;

c) Rezistenţele generalizate sunt neutre faţă de modificările variabilelor specifice, numai elementele ce înmagazinează energie şi sursele din sistem putând determina modificări instantanee ale acestor variabile.

I.4.3. Condiţii la limită specifice problemelor practice - domenii de modelare

Toate aspectele studiate anterior au fost modelate în ipoteza că vitezele de variaţie ale variabilelor funcţionale sunt mici, procesele nefiind rapid variabile, ci cvasi-statice. În condiţiile unui regim oscilant sinusoidal, ipoteza menţionată echivalează cu frecvenţe reduse de oscilaţie. Suplimentar, proprietăţile funcţionale depind de constrângerile aplicate elementului studiat, adică de condiţiile la limite specifice domeniului în care se face modelarea. În aceste condiţii, comportamentul funcţional este identificat în condiţiile în care mărimile fizice variabile iau valori constante, inclusiv zero. Un exemplu relevant, specific unui dispozitiv mecanic, este prezentat în fig. I.4.9.

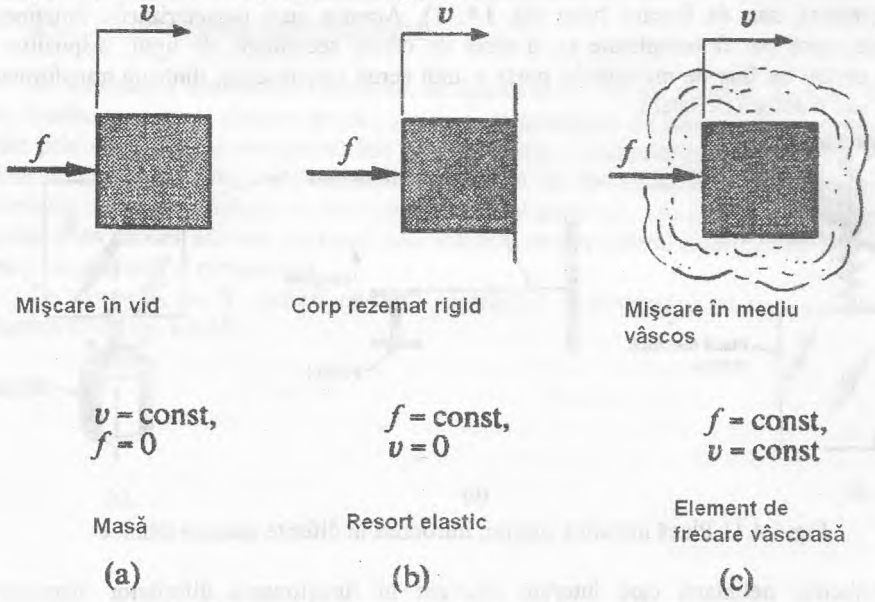


Fig. I.4.9 Exemplu relevant, specific unui dispozitiv mecanic

În domeniu electric, o analiză similară este prezentată în fig. I.4.10.

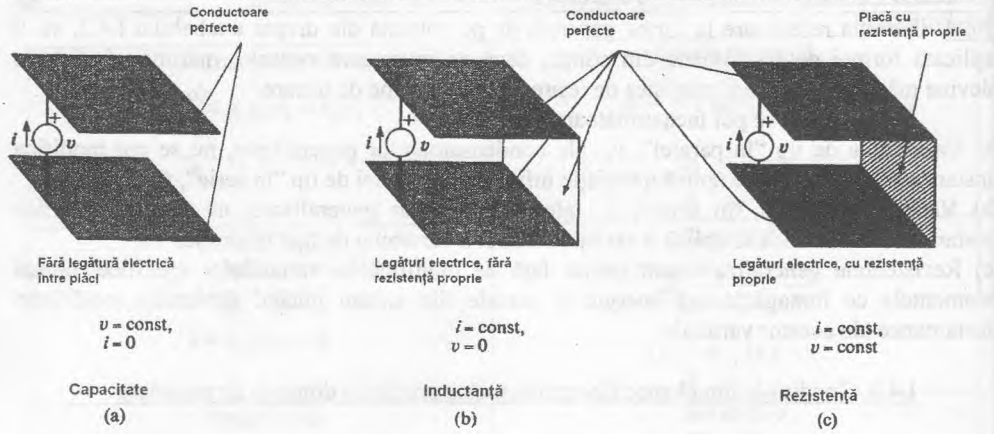


Fig. I.4.10 Exemplu relevant, specific unui dispozitiv electric

În realitate, efecte parazite (secundare) sunt prezente întotdeauna şi însoţesc aspectele funcţionale principale, care au fost studiate anterior. Considerarea rezistenţei electrice a unei bobine, folosită în principal ca o inductanţă, este un exemplu de efect parazit.

În domeniu mecanic, o placă metalică subţire, introdusă în diferite sisteme tehnice, poate fi considerată, în funcţie de aspectele esenţiale, ca fiind un element inerţial (masic), elastic (resort), sau de frecare (vezi fig. I.4.11). Acestea sunt caracterizările funcţionale principale, care pot fi completate cu o serie de efecte secundare, de tipul: dispozitiv de reflexie pentru un flux de microunde, parte a unui ecran electrostatic, dintr-un transformator electric, sau o antenă de satelit.

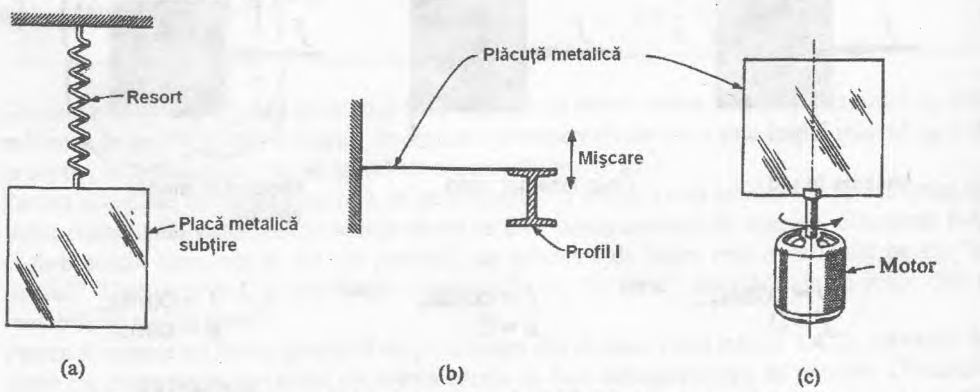


Fig. I.4.11 Placă metalică subţire, introdusă în diferite sisteme tehnice

Efectele neliniare, care intervin frecvent în funcţionarea diferitelor dispozitive, afectează comportamentul elementelor de circuit considerate.

Să considerăm un resort elastic, caracterizat de o relaţie funcţională forţă-deformaţie neliniară (vezi fig. I.4.12).

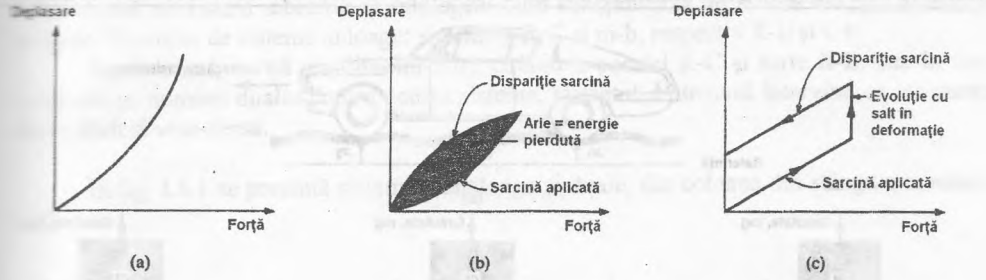


Fig. I.4.12 Resort elastic, caracterizat de o relație funcțională forță-deformație neliniară

În varianta (a), elementul este de tip pur neliniar, funcția de variație fiind bijectivă. În varianta (b), graficul prezintă un histerezis, care la parcurgerea unui ciclu de funcționare introduce o pierdere de energie, calculată ca arie cuprinsă între cele două curbe marcate prin săgeți. În varianta (c), se evidențiază zone de fluaj (porțiunile verticale ale curbei), specifice materialelor plastice, precum nylonul și metalele în stare topită.

I.4.4. Modelarea sistemelor complexe

În modelarea sistemelor complexe, se apelează la descompunerea acestora în mai multe subsisteme simple (liniare și/sau neliniare), caracterizate de ecuațiile lor funcționale și cuplate prin condițiile de compatibilitate și continuitate. Când numărul elementelor simple, folosite în modelare, este finit, se obține un model de tip rețea. Pe măsură ce numărul elementelor crește spre infinit, se tinde spre un model continuu, sau cu parametri distribuiți. Alegerea unui model adecvat unei aplicații practice este rezultatul unei decizii inginerești, bazată pe experiență și competență.

Ca exemplu, va fi analizat modelul simplificat al sistemului de suspensie al unui autoturism (vezi fig. I.4.13).

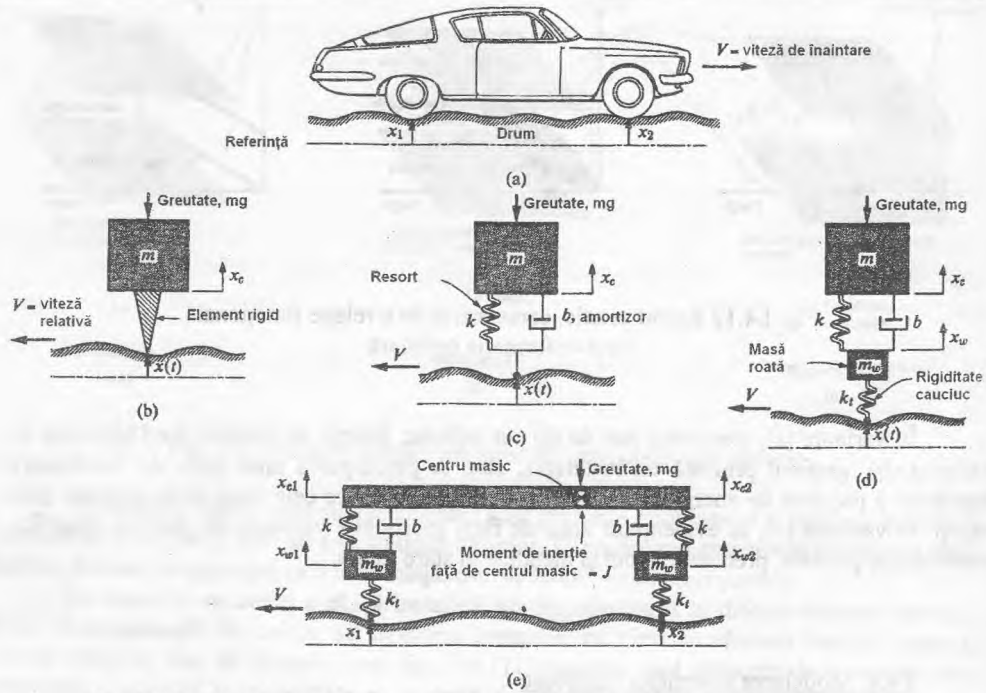


Fig. I.4.13 Modelul simplificat al sistemului de suspensie al unui autoturism

Scopul analizei este ca prin modelare adecvată să poată fi optimizat sistemul de resoarte şi amortizoare, aferent suspensiei autoturismului.

Cel mai simplu model al suspensiei este redat în fig. I.4.13 (b), unde masa autoturismului este concentrată şi deplasată pe verticală printr-un element rigid, în funcţie de denivelările terenului. La viteze mari de deplasare şi în condiţiile unui teren accidentat se obţin acceleraţii pe verticală foarte mari, inacceptabile.

Un model îmbunătăţit este prezentat în fig. I.4.13 (c), prin care sunt modelate resoartele şi amortizoarele din sistemul de suspensie. Pot fi considerate caracteristici neliniare sau liniare, într-o primă aproximare, cu scopul realizării unui calcul de predimensionare.

Pentru a îmbunătăţi modelul, în continuare, mai ales la viteze mari de deplasare şi pentru distanţe mici între denivelările terenului, se iau în considerare şi masele transmisiei principale - roţilor motoare şi elasticitatea cauciucurilor (fig. I.4.13 (d)).

În final, pentru a ţine seama şi de distribuţia maselor caroseriei autoturismului se poate construi un model mai complex, de tipul celui prezentat în fig. I.4.13 (e). Sunt evidenţiate aici şi cele două punţi faţă-spate ale vehiculului.

În practică, se apelează şi la modele tridimensionale, neliniare, de o complexitate maximă şi care reproduc în mod realist funcţionarea sistemului de suspensie, metodele de calcul-proiectare fiind în mod obligatoriu asistate de calculator.

I.5. Sisteme analoage şi duale

Am constatat, în cele studiate anterior, că ecuaţiile care descriu funcţionarea diferitelor sisteme fizice sunt similare. Datorită acestor similitudini, este posibil ca înţelegând cum

funcționează un sistem mecanic să înțelegem cum funcționează un sistem electric analog și reciproc. Exemple de sisteme anloage: sistemele R-C și m-b, respectiv R-L și k-b.

Suplimentar, există similitudini între circuitele paralel R-C și serie R-L, caz în care sistemele se numesc duale. Pentru aceste sisteme, curentul dintr-unul intervine ca tensiunea din celălalt și vice-versa.

În fig. I.5.1 se prezintă sistemele analoage și duale, din coloana din stânga a tabelului I.4.2.

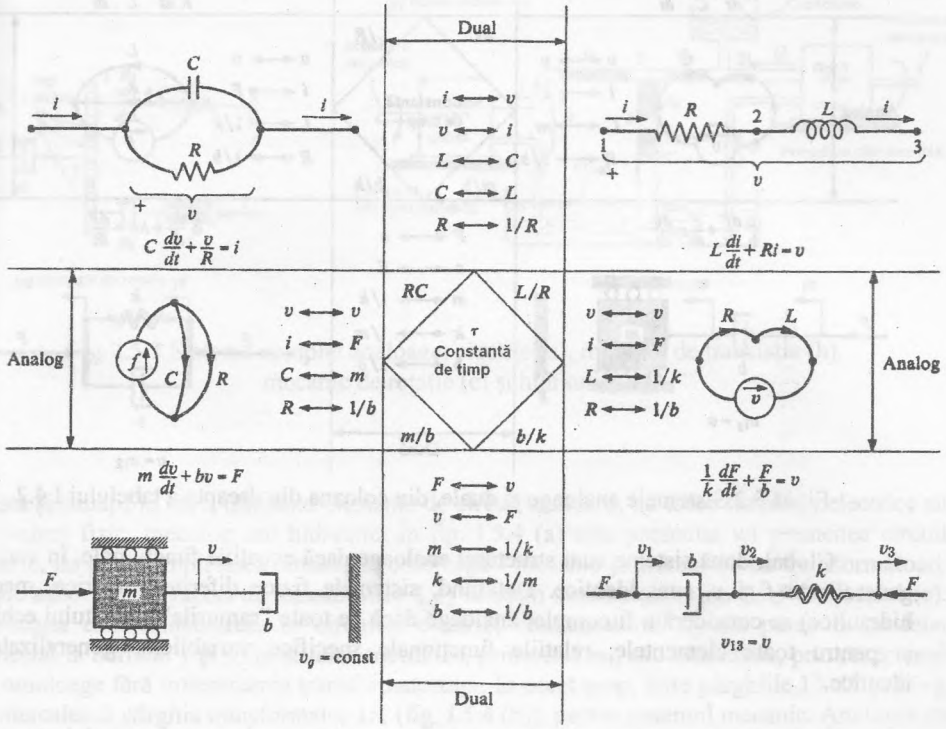


Fig. I.5.1 Sistemele analoage și duale, din coloana din stânga a tabelului I.4.2

În fig. I.5.2 sunt reprezentate sistemele analoage și duale, din coloana din dreapta a tabelului I.4.2.

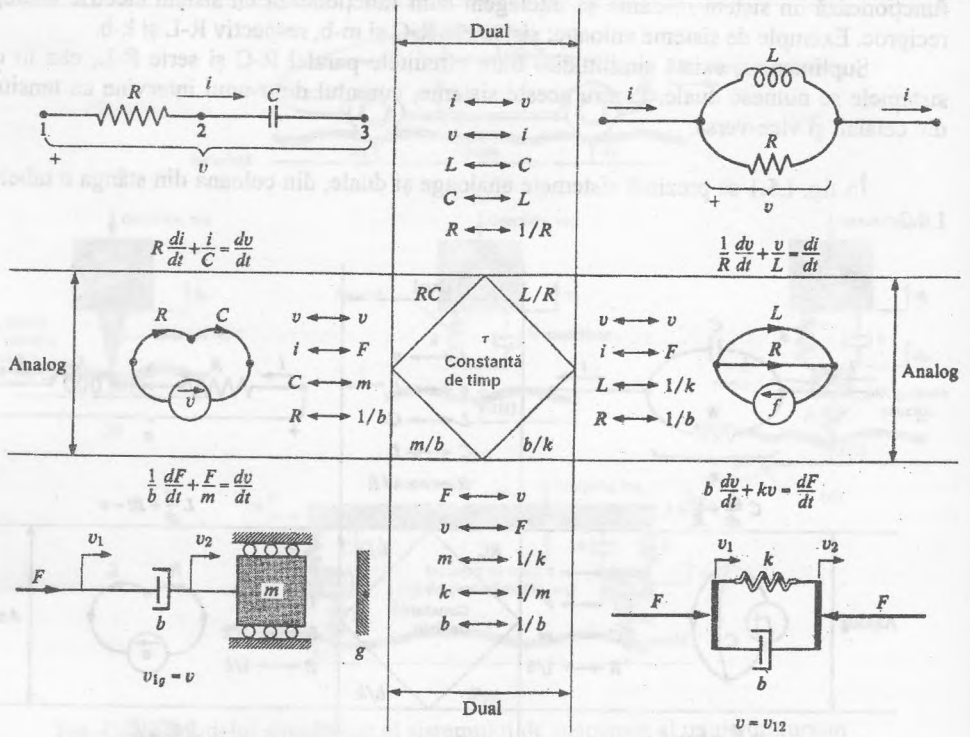


Fig. I.5.2 Sistemele analoage şi duale, din coloana din dreapta a tabelului I.4.2

Global, două sisteme sunt structural analoage dacă ecuaţiile funcţionale, în variabilele generalizate *f* şi *v*, sunt identice. Detaliind, sistemele fizice diferite (electrice, mecanice, hidraulice) se consideră a fi complet analoage dacă pe toate "ramurile" circuitului echivalent şi pentru toate elementele, relaţiile funcţionale specifice variabilelor generalizate sunt identice.

În fig. I.5.3 sunt prezentate patru sisteme complet analoage: electric (a), mecanic de translaţie (b), mecanic de rotaţie (c) şi hidraulic (d). Toate aceste sisteme sunt fizic realizabile şi pot fi asociate cu aplicaţii practice.

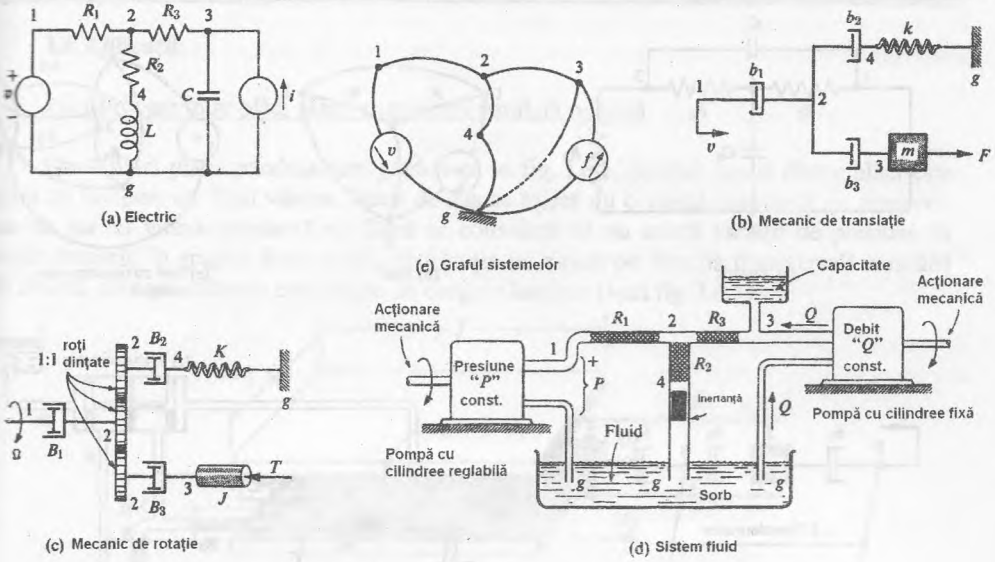


Fig. I.5.3 Sisteme complet analoage: electric (a), mecanic de translație (b), mecanic de rotație (c) și hidraulic (d)

Există și situații în care, utilizând elemente de circuit standard, nu toate sistemele electrice au echivalent fizic, mecanic sau hidraulic. În fig. I.5.4 (a) este prezentat un asemenea circuit electric, iar prin completarea circuitelor omoloage - mecanic și hidraulic - cu transformatoare ideale adecvate (cu raport de transformare 1:1) se obțin sistemele din fig. I.5.4 (b) și I.5.4 (c). Explicația este următoarea: în circuitul electric, condensatorul C_1 nu putea fi modelat (conectat la bornele 1 și 3) în sisteme mecanice, prin masa m_1, sau hidraulice, prin rezervorul C_1, omoloage fără introducerea transformatorului. În acest scop, între pârghiile 1'- 1" și 3 – g se intercalează pârghia transformator 1:1 (fig. I.5.4 (b)), pentru sistemul mecanic. Analogia cu sistemul hidraulic este următoarea: pârghia 1'- 1" este echivalentă cu conexiunile 1'și 1" pe fețele laterale ale pistoanelor de capăt ale transformatorului, iar pârghia 3 – g este modelată prin conexiunile 3 și g pe fețele laterale ale pistonului central al transformatorului; de menționat că, pârghia transformator 1:1 (fig. I.5.4 (b)) este modelată prin tija solidară a celor trei pistoane (fig. I.5.4 (c)).

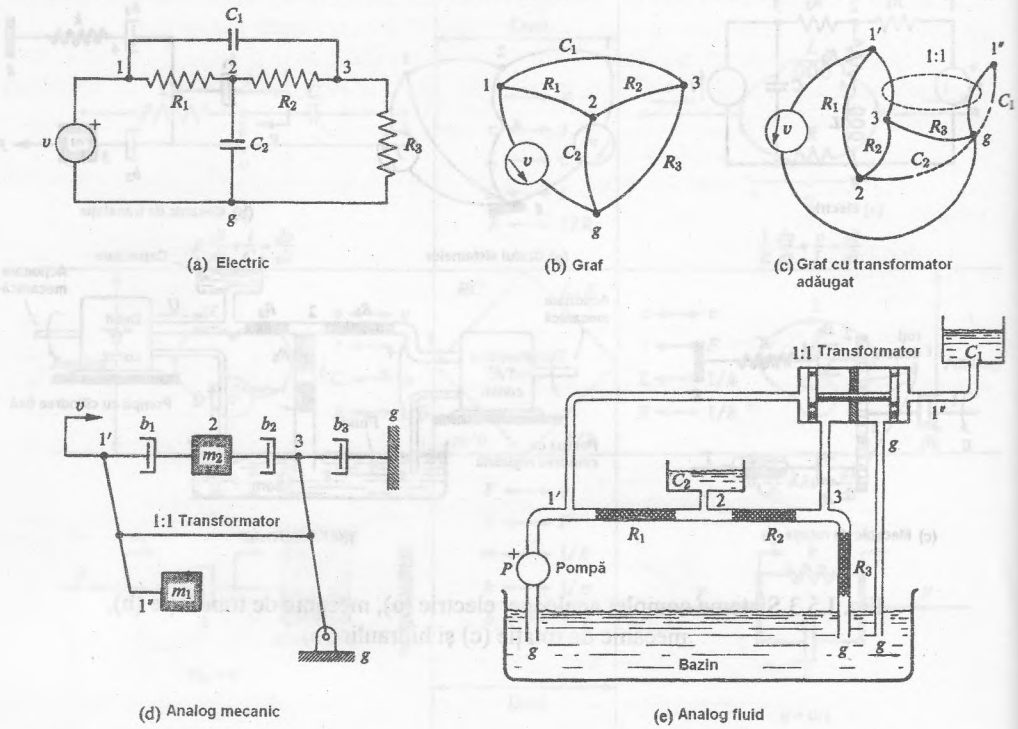


Fig. I.5.4 Exemplu când nu toate sistemele electrice au echivalent fizic, mecanic sau hidraulic

I.6 Aplicații

I.6.1 Frecare între plăci plane cu mișcare paralelă relativă

Două plăci plane paralele sunt plasate ca în fig. I.6.1. Spațiul îngust dintre plăci este umplut cu ulei sau alt fluid vâscos. Placa de sus se mișcă cu o viteză constantă v_1, respectiv placa de jos cu viteza constantă v_2. Dacă se consideră că nu există variații de presiune în direcția curgerii, în spațiul dintre plăci, distribuția de viteze pe direcția transversală mișcării va fi liniară, corespunzătoare unui regim de curgere laminar (vezi fig. I.6.1).

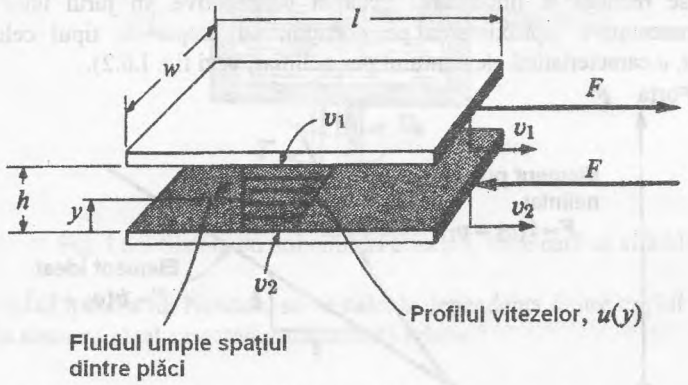


Fig. I.6.1 Frecare între plăci plane cu mișcare paralelă relativă

a) Pornind de la ipoteza lui Newton, se va calcula dependența dintre forța F și vitezele v_1 și v_2. Ce tip de element ideal caracterizează această relație ?

Ipoteza lui Newton se scrie: $\tau = \eta \dfrac{du}{dy}$ (I.6.1)

unde: τ este efortul de frecare tangențial pe plăci și în interiorul domeniului fluid, η este vâscozitatea dinamică, u este viteza fluidului, iar y este coordonata măsurată pe direcția transversală plăcii inferioare.

$$F = \tau w l = \frac{w l \eta}{h} v_{12} = b v_{12} \qquad \text{(I.6.2)}$$

unde: w este lățimea iar l este lungimea plăcii superioare, $v_{12} = v_1 - v_2$ este viteza relativă a plăcii superioare față de cea inferioară.
Notând cu $b = wl\eta/h$ coeficientul constant care multiplică termenul v_{12}, relația dedusă corespunde unui amortizor ideal de translație.

b) Dacă vitezele v se majorează semnificativ, sau dacă interstițiul h crește, profilul de viteze $u(y)$ se abate de la cel liniar și curgerea dintre plăci devine turbulentă. În aceste condiții, nu mai este valabilă ipoteza lui Newton și dacă considerăm $v_1 > v_2$ atunci se poate aproxima variația efortului de frecare tangențial pe plăci cu relația:

$$\tau = c(v_1 - v_2)^2 = c v_{12}^2 \qquad \text{(I.6.3)}$$

unde: c este o constantă oarecare, care depinde de parametrii curgerii.

În aceste condiţii, mai este posibil să caracterizăm dependenţa dintre forţa F şi vitezele v_1 şi v_2 printr-un element tip ? Există condiţii de reprezentare printr-un element ideal ?

$$F = \tau wl = wlcv_{12}^2 \tag{I.6.4}$$

Dacă se poate realiza fizic condiţia:

$$wlcv_{12} = b \tag{I.6.5}$$

atunci este valabilă aproximarea cu un amortizor hidraulic de translaţie, iar dacă se consideră $b \cong$ cst. amortizorul este ideal.

Practic, se recurge la liniarizarea ecuaţiei constitutive, în jurul unor puncte de funcţionare reprezentative (aproximarea pe porţiuni, cu drepte de tipul celei specifice elementului ideal, a caracteristicii elementului pur neliniar, vezi fig. I.6.2).

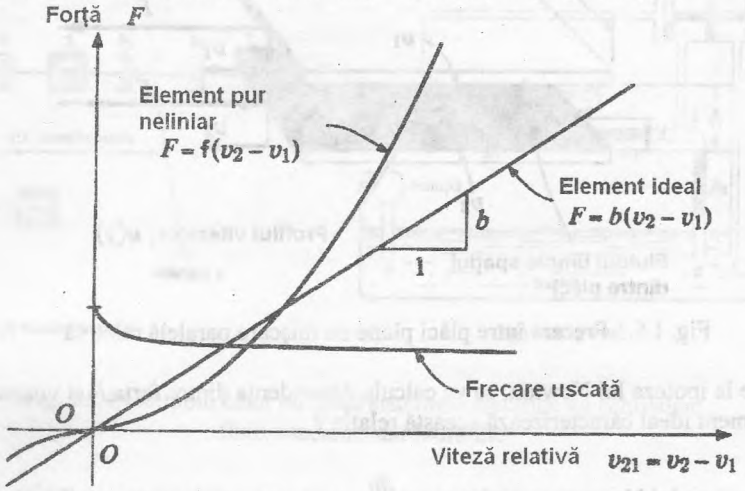


Fig. I.6.2 Ecuaţia constitutivă, pe care se poate aplica liniarizarea elementului pur neliniar

De ex. în jurul unui punct, caracterizat prin ecuaţia constitutivă:

$$F_0 = wlcv_{120}^2 \tag{I.6.6}$$

se poate utiliza aproximarea:

$$F = -wlcv_{120}^2 + 2wlcv_{120}v_{12} \tag{I.6.7}$$

I.6.2 Frecare între doi cilindri coaxiali

Se consideră un sistem cu doi cilindri coaxiali, între care se află ulei cu vâscozitatea dinamică η şi care se rotesc cu viteze unghiulare constante (vezi fig. I.6.3). Geometria interstiţiului dintre cei doi cilindri este uniformă în lungul liniei generatoarei de contact l (grosimea interstiţiului h = cst.).

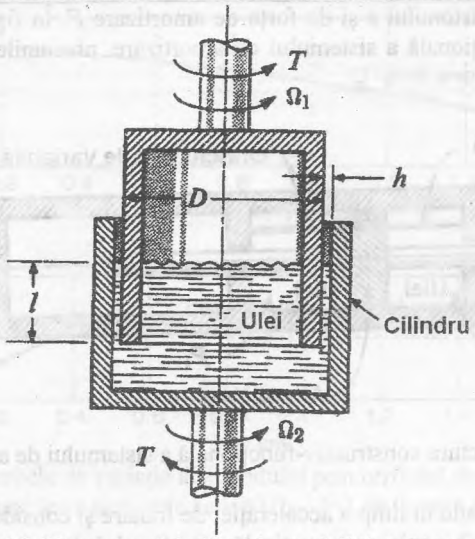


Fig. I.6.3 Sistem cu doi cilindri coaxiali, între care se află ulei

a) Pornind de la ipoteza lui Newton, se va calcula dependența dintre cuplul T și vitezele v_1 și v_2. Ce tip de element ideal caracterizează această relație ?

$$T = \tau \pi D l \frac{D}{2} = \eta \frac{D}{2} \frac{\Omega_{12}}{h} \pi D l \frac{D}{2} = \pi D l \eta \frac{D^2}{4h} \Omega_{12} = B \Omega_{12} \qquad \text{(I.6.8)}$$

unde: D este diametrul exterior al cilindrului interior, $\Omega_{12} = \Omega_1 - \Omega_2$ este viteza unghiulară relativă a cilindrului interior față de cel exterior și B este un coeficient constant.
Relația dedusă corespunde unui amortizor ideal de rotație.

b) Dacă vitezele unghiulare Ω_1 și Ω_2 sunt variabile în timp, cum se modifică ecuațiile constitutive ale dispozitivului studiat ?

Pe cilindrul 1, ecuația de echilibru dinamic este:

$$J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = T_{motor} - B\Omega_{12} \qquad \text{(I.6.9)}$$

unde: J_1 este momentul de inerție centrifugal al cilindrului 1, T_{motor} este cuplul motor aplicat pe cilindrul 1.
Pe cilindrul 2, ecuația de echilibru dinamic se scrie:

$$J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = B\Omega_{12} \qquad \text{(I.6.10)}$$

unde: J_2 este momentul de inerție centrifugal al cilindrului 2.

I.6.3 Sistem de amortizare cilindru tren aterizare aeronavă

Trenul de aterizare al unei aeronave cuprinde un cilindru hidraulic de acționare echipat cu un sistem de amortizare. Funcționarea acestuia implică existența unui drosel, de tip orificiu cu secțiune variabilă, care permite trecerea fluidului între cele două camere active cu o viteză

care depinde de poziţia pistonului s şi de forţa de amortizare F. În fig. I.6.4 este prezentată structura constructiv-funcţională a sistemului de amortizare, presiunile în camerele de lucru fiind notate cu P_1 şi P_2.

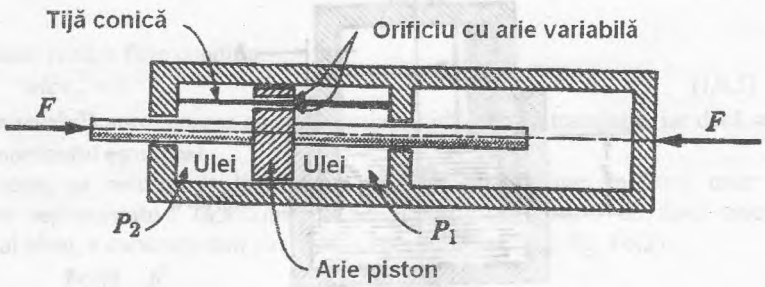


Fig. I.6.4 Structura constructiv-funcţională a sistemului de amortizare

a) Impunând curba de variaţie în timp a acceleraţiei de frânare şi considerând cazul ideal când la momentul de timp $t = 2$ s mişcarea verticală a pistonului de amortizare încetează (vezi curba a-v-s, din fig. I.6.5), se va determina prin calcul şi se va reprezenta grafic dependenţa forţă – poziţie piston (vezi fig. I.6.5), pentru amortizorul considerat. Se presupune că există două roţi pe aeronavă, masa acesteia fiind de aprox. 22760 kg.

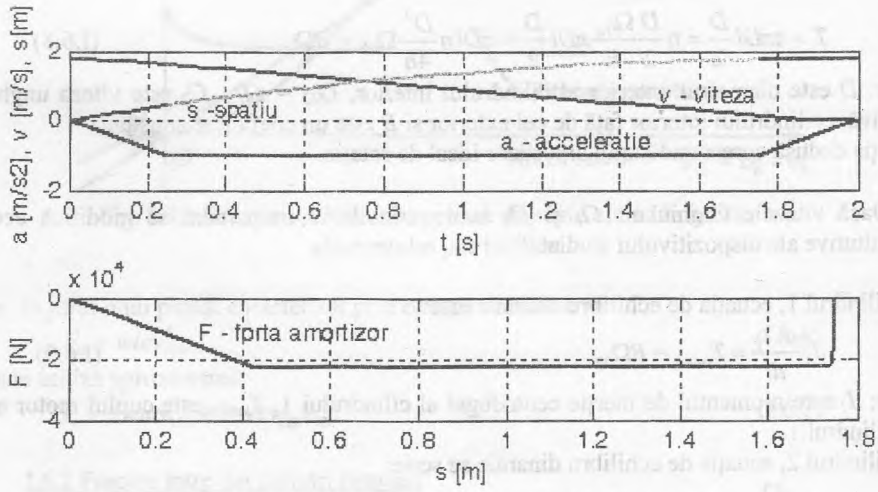
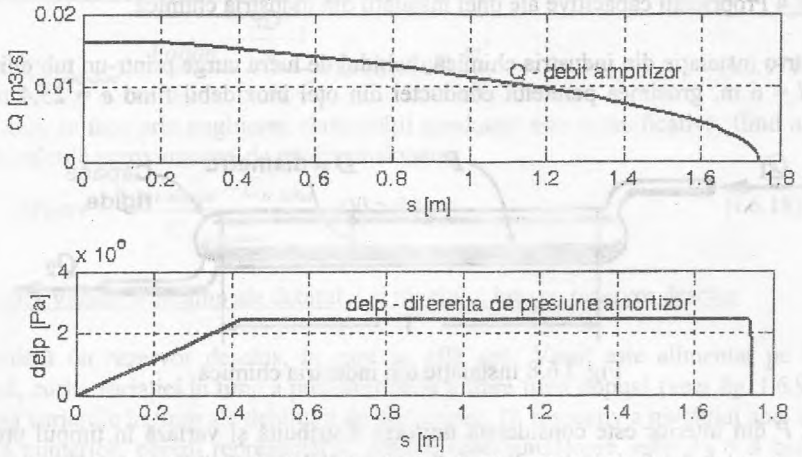


Fig. I.6.5 Curbele a-v-s şi forţă – poziţie piston

b) Pentru aceleaşi date ale problemei, se vor determina prin calcul şi se vor reprezenta grafic curbele de variaţie ale debitului prin orificiul de amortizare şi diferenţei de presiune între camerele active ($P_2 - P_1$), în funcţie de poziţia pistonului (fig. I.6.6).



Fig, I.6.6 Curbele de variație ale debitului prin orificiul de amortizare și diferenței de presiune între camerele active ($P_2 - P_1$), în funcție de poziția pistonului

c) În funcție de geometria orificiului de amortizare și de regimul de curgere - laminar sau turbulent – caracteristica funcțională a orificiului se scrie:

$$\frac{Q}{A_{orificiu}} = K_1(P_2 - P_1), \qquad \text{(I.6.11)}$$

pentru regim laminar și

$$\frac{Q}{A_{orificiu}} = K_2(P_2 - P_1)^{1/2}, \qquad \text{(I.6.12)}$$

pentru regim turbulent, unde: K_1 și K_2 sunt coeficienți care depind de geometria orificiului și de proprietățile lichidului de lucru.

Se vor determina prin calcul și se vor reprezenta grafic curbele de variație ale acestor doi coeficienți în funcție de poziția pistonului (fig. I.6.7). În condiții practice, se pune problema optimizării acestor caracteristici, în funcție de performanțele dinamice impuse și verificării riguroase a posibilităților de realizare fizică a caracteristicilor obținute prin simulare.

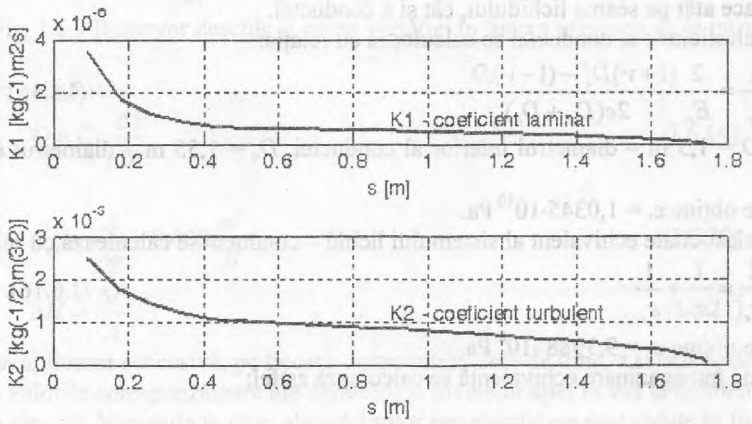


Fig. I.6.7 Curbele de variație ale coeficienților K1 și K2, în funcție de poziția pistonului

I.6.4 Proprietăţi capacitive ale unei instalaţii din industria chimică

Într-o instalaţie din industria chimică, lichidul de lucru curge printr-un tub cilindric de lungime l = 6 m, grosimea peretelui conductei din oţel inoxidabil fiind e = 25,4 mm (fig. I.6.8).

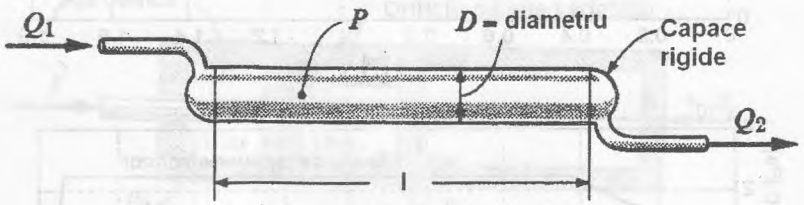


Fig. I.6.8 Instalaţie din industria chimică

Presiunea P din interior este considerată uniform distribuită şi variază în timpul procesului tehnologic în intevalul 0 ÷ 35 bar. Se urmăreşte studiul proprietăţilor capacitive ale acestui sistem, lichidul având un modul de elasticitate ε_l = 10338 bar şi densitatea ρ = 960 kg/m^3. Pentru oţel, modulul Young este E_r = 103450 bar, iar coeficientul Poisson este ν = 0,3.

Se va calcula capacitatea hidraulică în două cazuri tipice:

a) Se neglijează elasticitatea tubului de oţel, echivalent cu a-l considera perfect rigid, caz în care înmagazinarea energiei hidrostatice se face numai pe seama lichidului.
Capacitatea hidraulică se calculează astfel:

$$C_{H\,lichid} = \frac{Volum}{\varepsilon_l} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} l}{\varepsilon_l} = 1{,}0256 \cdot 10^{-8} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.13)}$$

Energia înmagazinată în procesul de variaţie a presiunii de la zero la 35 bar este:

$$W = \frac{1}{2} C_{H\,lichid} \Delta P^2 = 62781\,J \qquad \text{(I.6.14)}$$

b) Se ia în considerare elasticitatea conductei de oţel, caz în care caz în care înmagazinarea energiei se face atât pe seama lichidului, cât şi a conductei.
Modulul de elasticitate al conductei se calculează cu relaţia:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{2}{E_r} \frac{(1+\nu)D_e^2 - (1-\nu)D_i^2}{2e(D_e + D_i)} \qquad \text{(I.6.15)}$$

unde: $D_i = D$ = 1,5 m – diametrul interior al conductei, D_e = 1,55 m – diametrul exterior al conductei.
Prin calcul se obţine $\varepsilon_r = 1{,}0345 \cdot 10^{10}$ Pa.
Modulul de elasticitate echivalent al sistemului lichid – conductă se calculează cu relaţia:

$$\frac{1}{\varepsilon_e} = \frac{1}{\varepsilon_l} + \frac{1}{\varepsilon_r} \qquad \text{(I.6.16)}$$

Prin calcul se obţine $\varepsilon_e = 9{,}3988 \cdot 10^8$ Pa.
Capacitatea de înmagazinare echivalentă se calculează astfel:

$$C_{H\ echivalent} = \frac{Volum}{\varepsilon_e} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} l}{\varepsilon_e} = 1{,}1281 \cdot 10^{-8} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.17)}$$

Eroarea care se face prin neglijarea elasticității conductei este semnificativă, fiind neglijabilă numai în calcule aproximative, de predimensionare:

$$Eroare = \frac{C_{H\ echivalent} - C_{H\ lichid}}{C_{H\ echivalent}} \cdot 100 \cong 9\,\% \qquad \text{(I.6.18)}$$

I.6.5 Variațiile în timp ale debitului și nivelului într-un rezervor deschis

Se consideră un rezervor deschis, în care se află apă. Vasul este alimentat pe la partea inferioară, curba variației în timp a presiunii de la intrare fiind impusă (vezi fig. I.6.9). Se vor determina variațiile în timp ale debitului de alimentare, Q, respectiv a nivelului apei în vas, H. Aplicația numerică, pentru reprezentările grafice corespunzătoare, este: P_0 = 4 bar, T = 10 min, H_0 = 50 m, A = 78,5 m^2, ρ = 1000 kg/m^3, V_0 = 3925 m^3.

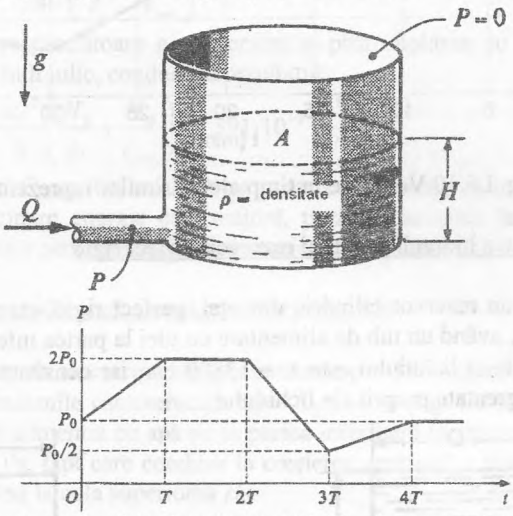


Fig. I.6.9 Rezervor deschis și curba variației în timp a presiunii de la intrare

Relațiile de calcul sunt:

$$Q = C_H \frac{\Delta P}{\Delta t} \qquad \text{(I.6.19)}$$

unde:

$$C_H = \frac{A}{\rho g} = 0{,}008 \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.20)}$$

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{A} \qquad \text{(I.6.21)}$$

Prin aplicarea succesivă, pe fiecare dintre intervalele de timp, a relațiilor de mai sus, se calculează valorile corespunzătoare ale debitelor și nivelelor apei în vas la momentele de timp marcate în abscisă. Variațiile în timp ale mărimilor reprezentative sunt redate în fig. I.6.10.

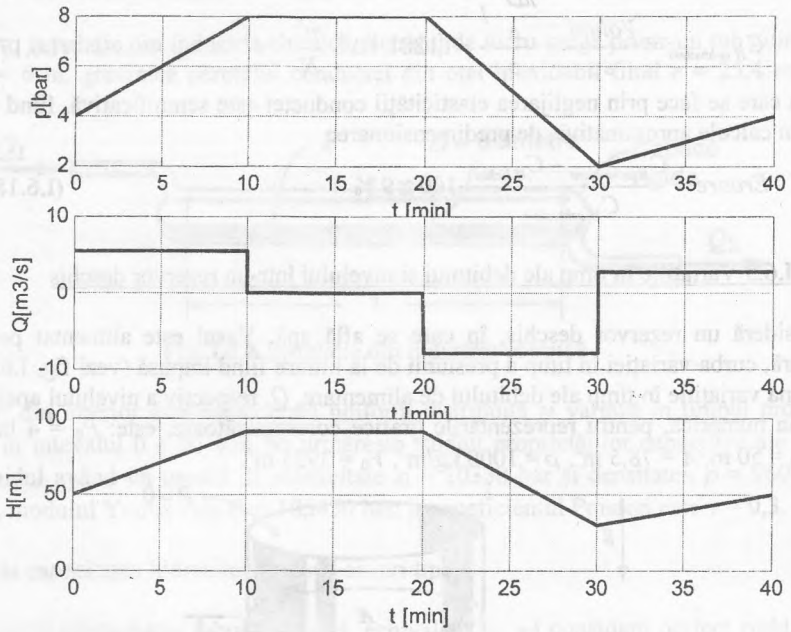


Fig. I.6.10 Variaţiile în timp ale mărimilor reprezentative

I.6.6 Capacitatea hidraulică a unui rezervor perfect rigid

Se consideră un rezervor cilindric din oţel, perfect rigid, cu diametrul D = 0,3 m şi înălţimea H_T = 0,3 m, având un tub de alimentare cu ulei la partea inferioară (vezi fig. I.6.11). Modulul de elasticitate al lichidului este ε_l = 13800 bar, iar densitatea sa ρ = 950 kg/m^3. Se neglijează forţele de greutate proprii ale lichidului.

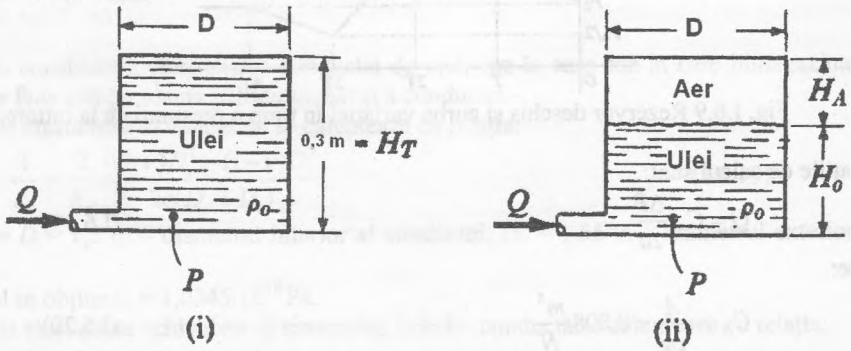


Fig. I.6.11 Rezervor cilindric din oţel, plin cu lichid (i) şi cu pernă de aer (ii)

a) Presupunând că vasul este plin cu lichid – fig. I.6.11 (i) – se va calcula capacitatea hidraulică a sistemului, cu relaţia:

$$C_H = \frac{V_0}{\varepsilon_l} \cong 1{,}5 \cdot 10^{-11} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.22)}$$

b) După cum se prezintă în fig. I.6.11 (ii), se consideră că, la umplerea cu lichid, o anumită cantitate de aer a rămas în vas ($H_A = 0{,}1 \cdot H_0$). Presupunând evoluția termodinamică a aerului ca fiind izotermă, iar presiunea medie a uleiului din rezervor $P_0 = 1378360$ Pa, se va calcula capacitatea de înmagazinare energie echivalentă a sistemului lichid-aer și se va evalua influența prezenței aerului în rezervor.

Înălțimea coloanei de aer este $H_A = H/11$.

La umplerea vasului cu lichid, transformarea izotermă a aerului se scrie:

$$P_{atm} H_T = P_A H_A \tag{I.6.23}$$

și se aproximează $P_0 \cong P_A$.

Modulul de elasticitate al aerului se calculează cu relația:

$$\varepsilon_{aer} = -\Delta P \frac{V_0}{\Delta V} = \frac{H}{H - H_A}\left(P_0 - P_{atm}\right) \cong 14\ bar \tag{I.6.24}$$

Calculul capacității de înmagazinare energie se calculează din relația:

$$\Delta V = -\Delta P \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{H_0}{\varepsilon_l} + \frac{H_A}{\varepsilon_{aer}}\right), \tag{I.6.25}$$

care prin gruparea corespunzătoare a termenilor și prin cuplarea cu relația de definiție a capacității unui sistem hidraulic, conduce la rezultatul:

$$C_{Hechiv} = \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{H_0}{\varepsilon_l} + \frac{H_A}{\varepsilon_{aer}}\right) = 1{,}391 \cdot 10^{-9}\ \frac{m^5}{N} \tag{I.6.26}$$

Prin calculul raportului $C_{Hechiv}/C_H = 92{,}73$, se poate concluziona că influența aerului asupra capacității de înmagazinare energie este majoră, prezența acestuia în sistemele hidraulice putând altera semnificativ performanțele lor dinamice.

I.6.7 Capacitatea hidraulică a unui rezervor tronconic

Se consideră un rezervor de stocarea apei, cu densitatea $\rho = 1000$ kg/m^3, de formă tronconică, cu $\alpha = 30°$ și cu dimensiunile caracteristice $H_0 = D_0 = 4$ m (fig. I.6.12). Rezervorul metalic este perfect rigid, fiind alimentat cu apă pe la partea inferioară (secțiunea de intrare 1), cu un debit constant $Q = 10$ l/s, fapt care conduce la creșterea continuă a nivelului H (în secțiunea curentă de calcul 2), până la cota superioară H_0.

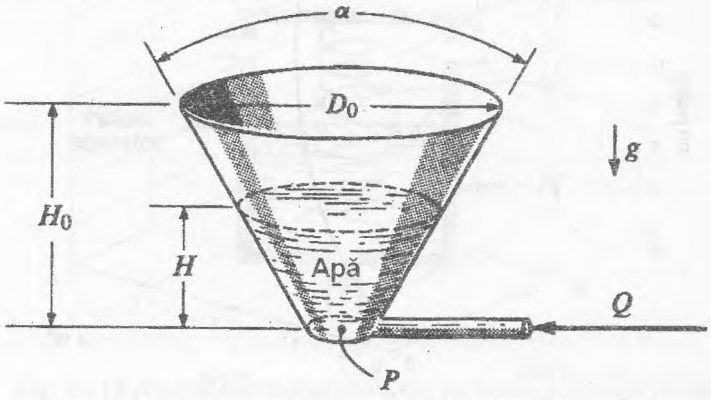


Fig. I.6.12 Rezervor de stocarea apei, de formă tronconică

Se va calcula capacitatea hidraulică a sistemului şi energia înmagazinată, fiind studiate pe cale grafică dependenţele acestor mărimi cu volumul de apă acumulat în vas V şi cu presiunea la baza rezervorului P.

Pe baza relaţiei lui Bernoulli, aplicată între secţiunea de intrare 1, la diametrul D_1, şi secţiunea curentă 2, la diametrul D_2, se poate deduce relaţia de calcul a presiunii la baza rezervorului:

$$P = \rho g\left[H + \frac{8Q^2}{\pi^2 g}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)\right], \tag{I.6.27}$$

unde:

$$D_1 = D_0 - 2H_0 tg\frac{\alpha}{2} \tag{I.6.28}$$

$$D_2 = D_0 + 2tg\frac{\alpha}{2}(H - H_0) \tag{I.6.29}$$

Pe de altă parte, volumul de apă acumulat între secţiunile menţionate mai sus este:

$$V = \frac{\pi H}{12}\left(D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2\right) \tag{I.6.30}$$

Pentru implementarea prin calcul diferenţial a algoritmului specific problemei enunţate, se poate folosi următoarea relaţie de dependenţă dintre variaţia elementară a nivelului din vas şi variaţia corespunzătoare de volum:

$$dV \cong \frac{\pi}{4}\left(D_0 + 2tg\frac{\alpha}{2}dH\right)^2 dH \tag{I.6.31}$$

Calculul capacităţii hidraulice se face cu relaţia $C_H = \frac{\Delta V}{\Delta P}$, iar energia înmagazinată se determină din ecuaţia $W = \frac{1}{2}\frac{V^2}{C_H}$. Graficele dependenţelor acestor mărimi cu volumul de apă acumulat în vas V şi cu presiunea la baza rezervorului P sunt prezentate în fig. I.6.13.

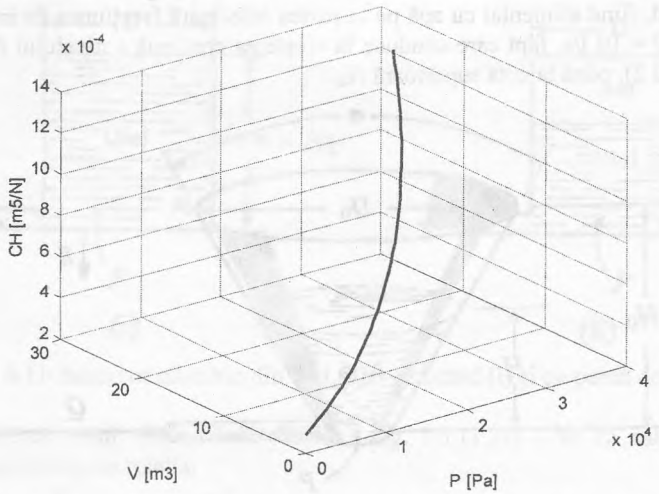


Fig. I.6.13' Graficele dependenţei capacităţii C_H şi energiei înmagazinată W de volumul de apă acumulat în vas V şi de presiunea la baza rezervorului P

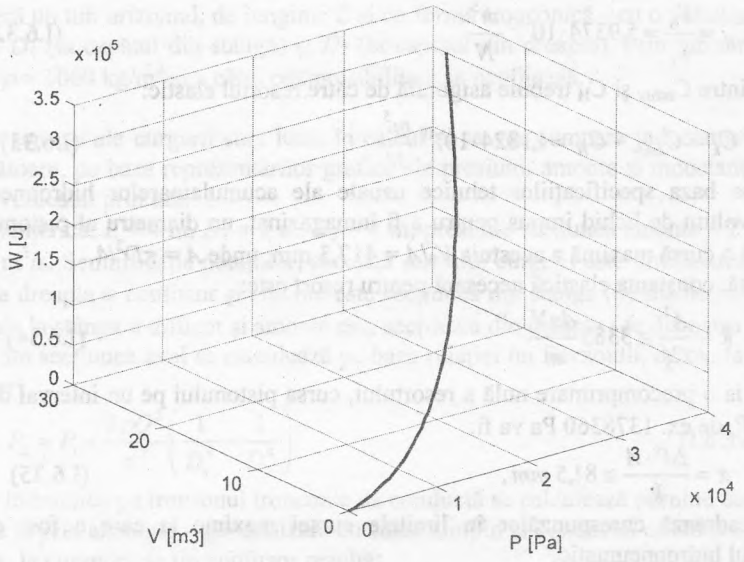


Fig. I.6.13'' Graficele dependenței capacității C_H și energiei înmagazinată W de volumul de apă acumulat în vas V și de presiunea la baza rezervorului P

Din curbele prezentate, se observă neliniaritatea caracteristicilor, care deosebește net cazul vasului tronconic față de cel cilindric – unde, în mod evident, dependențele sunt liniare.

I.6.8 Dimensionarea unui acumulator hidropneumatic

Un acumulator hidropneumatic, cu piston și element elastic (fig. I.6.14), trebuie dimensionat pentru o capacitate $C_{echiv} = 1{,}1883 \cdot 10^{-10}$ m^5/N, la un volum de lichid înmagazinat $V_0 = 8{,}1936 \cdot 10^{-4}$ m^3.

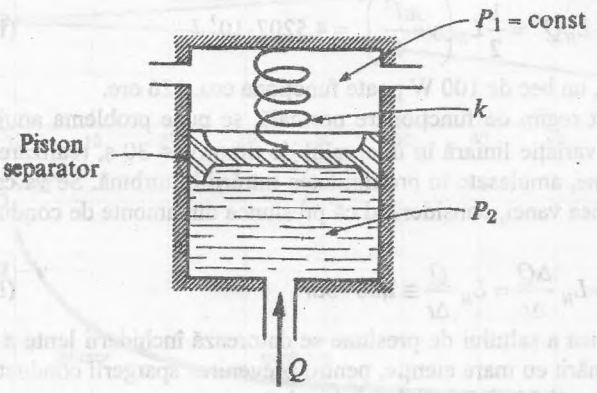


Fig. I.6.14 Acumulator hidropneumatic, cu piston și element elastic

Modulul de elasticitate al lichidului este ε_l = 13800 bar, deci capacitatea hidraulică specifică este:

$$C_H = \frac{V_0}{\varepsilon_l} = 5{,}9374 \cdot 10^{-13} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.32)}$$

Diferenţa dintre C_{echiv} şi C_H trebuie asigurată de către resortul elastic:

$$C_k = C_{echiv} - C_H = 1{,}1824 \cdot 10^{-10} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.33)}$$

Alegând, pe baza specificaţiilor tehnice uzuale ale acumulatoarelor hidropneumatice, în funcţie de volum de lichid impus pentru a fi înmagazinat, un diametru al pistonului D = 50 mm, rezultă o cursă maximă a acestuia V_0/A = 417,3 mm, unde $A = \pi D^2/4$.
În consecinţă, constanta elastică necesară pentru resort este:

$$k = \frac{A^2}{C_k} \cong 3383 \frac{daN}{m} \qquad \text{(I.6.34)}$$

Pornind de la o precomprimare nulă a resortului, cursa pistonului pe un interval de creştere a presiunii ΔP, de ex. 1378360 Pa va fi:

$$x = \frac{\Delta P \cdot A}{k} \cong 81{,}5\ mm, \qquad \text{(I.6.35)}$$

care se încadrează corespunzător în limitele cursei maxime la care a fost dimensionat acumulatorul hidropneumatic.

I.6.9 Conductă forţată turbină hidraulică

Se consideră o conductă forţată, care asigură aducerea apei dintr-un bazin (lac de acumulare) la o turbină hidraulică, cu diametrul d = 1,524 m şi lungimea l = 213,4 m. Presupunând conducta perfect rigidă, se va calcula inductanţa hidraulică a conductei.

$$L_H = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho l}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1{,}1699 \cdot 10^5 \frac{kg}{m^4} \qquad \text{(I.6.36)}$$

Viteza medie de curgere în conductă este v = 15,24 m/s. În aceste condiţii, energia înmagazinată este:

$$W = \frac{1}{2} L_H Q^2 = \frac{1}{2} L_H \left(v \frac{\pi d^2}{4} \right)^2 = 4{,}5207 \cdot 10^7 J \qquad \text{(I.6.37)}$$

Cu această energie, un bec de 100 W poate funcţiona cca. 126 ore.
Dacă, faţă de acest regim de funcţionare normală, se pune problema anulării debitului prin conductă, printr-o variaţie liniară în intervalul de timp Δt = 30 s, realizarea practică implică închiderea unei vane, amplasate în proximitatea intrării în turbină. Se va calcula creşterea de presiune, în secţiunea vanei, considerând că presiunea din amonte de conducta forţată rămâne constantă:

$$\Delta P = -L_H \frac{\Delta Q}{\Delta t} = L_H \frac{Q}{\Delta t} \cong 1{,}084\ bar \qquad \text{(I.6.38)}$$

Valoarea relativ mică a saltului de presiune se datorează închiderii lente a vanei, aspect care în practică este urmărit cu mare atenţie, pentru prevenirea spargerii conductei forţate, în cazul variaţiei prea rapide a debitului de lichid vehiculat.

I.6.10 Inductanță hidraulică tub orizontal tronconic

Se consideră un tub orizontal, de lungime L şi de formă tronconică - cu o variație liniară între diametrele D_1 (la capătul din stânga) şi D_2 (la capătul din dreapta). Prin tub circulă apă, cu densitatea $\rho = 1000$ kg/m^3 şi a cărei compresibilitate se neglijează.

a) Ambele sensuri ale curgerii sunt luate în calcul şi se vor compara inductanțele hidraulice corespunzătoare, pe baza reprezentărilor grafice ale presiunii amonte şi inductanțelor, funcție de debitul vehiculat prin tub.
Aplicație numerică: $L = 4$ m, $D_1 = 2$ m, $D_2 = 4$ m, presiune secțiunea amonte = 2 bar, debit $Q = 10 \div 50$ m^3/s. Semnificația notațiilor, asociată sensului curgerii este următoarea: curgere de la stânga la dreapta ≡ confuzor şi amonte este secțiunea din stânga (de diametru D_2), curgere de la dreapta la stânga ≡ difuzor şi amonte este secțiunea din dreapta (de diametru D_1).
Presiunea din secțiunea aval se calculează pe baza relației lui Bernoulli, de ex. la curgerea de tip confuzor:

$$P_2 = P_1 + \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4}\right) \qquad \text{(I.6.39)}$$

Inductanța hidraulică pe tronsonul tronconic de conductă se calculează pornind de la relația sa de definiție şi prin analogie – generalizare cu cazul simplu al conductei cilindrice, de lungime dată. De ex. la curgerea de tip confuzor rezultă:

$$L_H = \frac{P_2A_2 - P_1A_1}{A_m\dfrac{dQ}{dt}} = \frac{P_2A_2 - P_1A_1}{A_m\dfrac{(P_2 - P_1)A_m}{\rho L}} \qquad \text{(I.6.40)}$$

unde: $A_m = (A_1 + A_2)/2$ este media aritmetică a ariilor secțiunilor 1 şi 2.

Aplicând relațiile de mai sus se determină presiunile amonte-aval şi inductanțele, pentru curgerile confuzor-difuzor, reprezentărilor lor grafice fiind următoarele (vezi fig. I.6.15):

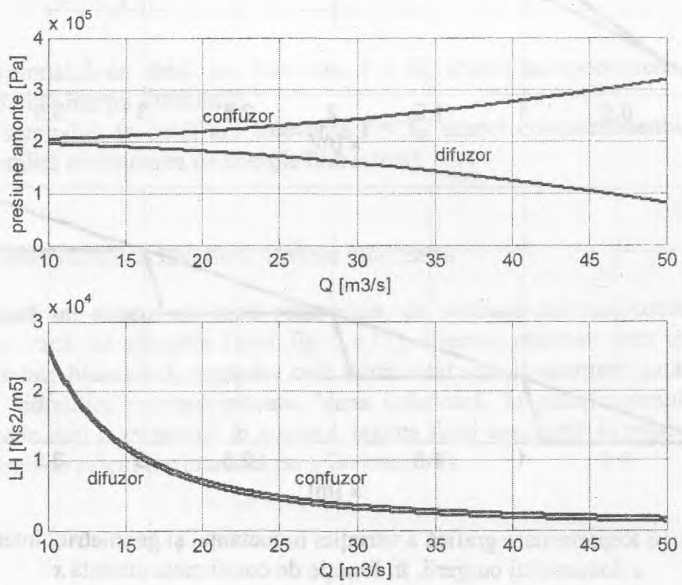


Fig. I.6.15 Presiuni amonte-aval şi inductanțe, pentru curgerile confuzor-difuzor

Se observă diferenţe nesemnificative între inductanţele specifice curgerilor de tip confuzor, respectiv difuzor.

b) Este interesant de studiat variaţia inductanţei în lungul tubului (funcţie de coordonata curentă x), mai ales în cazul în care variaţia secţiunii este neuniformă (cu abateri de la forma tronconică ideală).

Printr-o prelucrare adecvată a relaţiei de calcul a inductanţei dedusă anterior, urmărind evidenţierea prezenţei în ecuaţie a diametrelor D_1 şi D_2, se obţine:

$$L_H = \frac{16\rho L}{3\pi}\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2}{\left(D_1^2 + D_2^2\right)^2} \tag{I.6.41}$$

Dacă în această expresie se înlocuieşte L cu x şi se introduce diametrul D, corespunzător secţiunii la coordonata curentă $x \in [0,L]$, calculat cu relaţia:

$$D = D_2 - \frac{x}{L}\left(D_2 - D_1\right), \tag{I.6.42}$$

ecuaţia variaţiei inductanţei în lungul tubului se scrie:

$$L_{Hx} = \frac{16\rho x}{3\pi}\frac{D_2^2 + D^2 + D_2 D}{\left(D_2^2 + D^2\right)^2} \tag{I.6.43}$$

Introducând o variaţie în trepte a diametrului tubului tronconic şi efectuând calculele aferente, se pot reprezenta grafic variaţia inductanţei şi geometria interioară a domeniului curgerii, în funcţie de coordonata curentă x (vezi fig. I.6.16):

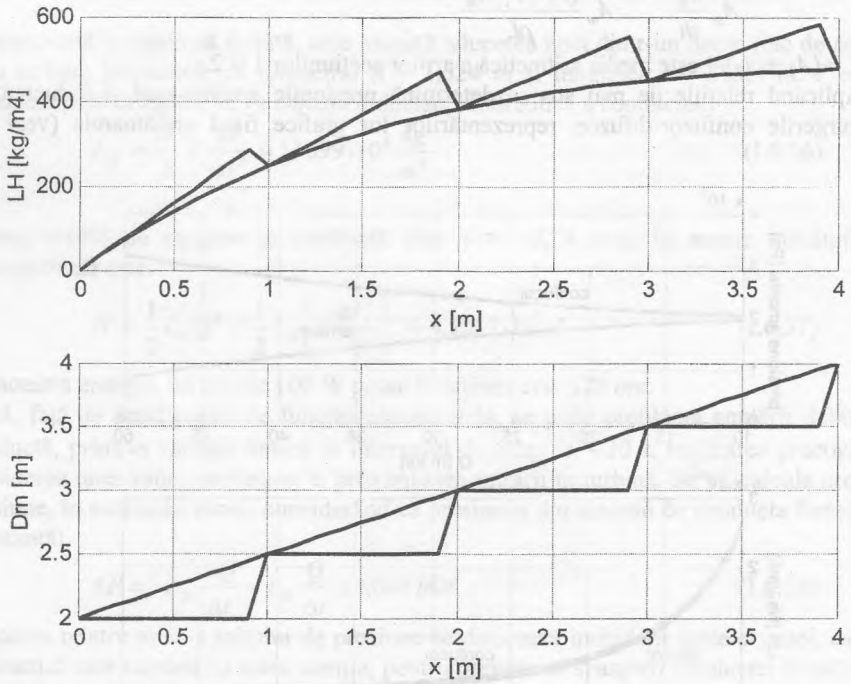


Fig. I.6.16 Reprezentare grafică a variaţiei inductanţei şi geometriei interioare a domeniului curgerii, în funcţie de coordonata curentă x

I.6.11 Curgere prin tub capilar – modelare element de circuit

Se consideră un lichid special, cu densitate şi vâscozitate ridicate (ρ = 27670 kg/m^3 şi η = 0,34475 Pa·s), care curge printr-n tub capilar de lungime l = 305 mm şi diametru d = 0,8 mm.

a) Dacă regimul de curgere este laminar, se calculează rezistenţa hidraulică:

$$R_H = \frac{128\eta l}{\pi d^4} = 10{,}46 \cdot 10^{12} \frac{Ns}{m^5} \qquad \text{(I.6.44)}$$

b) Pentru regim laminar, limita de valabilitate este dată de numărul Reynolds critic, 2300, pentru care debitul maxim de curgere prin tubul capilar este:

$$Q_{\max} = \frac{2300\pi d\eta}{4\rho} = 0{,}018\frac{l}{s} \qquad \text{(I.6.45)}$$

c) În regim nestaţionar de curgere, intervin inductanţa şi capacitatea hidraulice, care influenţează semnificativ comportamentul dinamic al sistemului:

$$L_H = \frac{\rho l}{\frac{\pi d^2}{4}} = 16798 \cdot 10^6 \frac{Ns^2}{m^5} \qquad \text{(I.6.46)}$$

$$C_H = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\rho g} = 185 \cdot 10^{-14} \frac{m^5}{N} \qquad \text{(I.6.47)}$$

d) Pentru multe sisteme hidraulice regimul sinusoidal de variaţie a debitului de curgere este reprezentativ, similar cu regimul de curent alternativ din electrotehnică. În aceste condiţii, se pune problema calculării frecvenţei de rezonanţă, pentru care comportamentul tubului capilar este pur rezistiv. Condiţia de rezonanţă se scrie:

$$\omega_0^2 L_H C_H = 1, \qquad \text{(I.6.48)}$$

relaţie din care rezultă:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_H C_H}} \cong 0{,}9\,Hz \qquad \text{(I.6.49)}$$

Comentarii:

- dacă semnalul de debit are frecvenţa f > f_0, atunci comportamentul este inductiv (predomină inerţia fluidului);
- dacă semnalul de debit are frecvenţa f < f_0, atunci comportamentul este capacitiv (predomină acumularea de energie hidraulică).

I.6.12 Curgere în sistem hidraulic cu două rezervoare

Se consideră un sistem cu două rezervoare, de secţiuni diferite, conectate prin două conducte la o vană de scurgere (vezi fig. I.6.17). Fiecare rezervor este caracterizat de o anumită capacitate hidraulică, respectiv cele două conducte de scurgere putând fi echivalate cu rezistenţe hidraulice corespunzătoare. Vana inferioară, în poziţie complet deschisă, nu introduce practic nici o rezistenţă în curgere, ieşirea fiind conectată la presiune atmosferică, luată ca referinţă de calcul (se lucrează cu suprapresiuni).

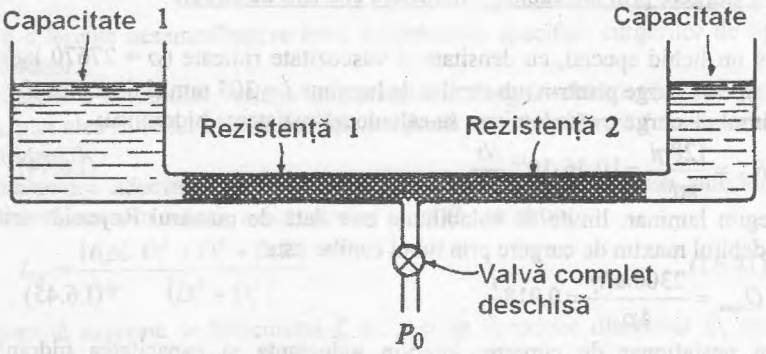


Fig. I.6.17 Sistem cu două rezervoare, de secţiuni diferite, conectate prin două conducte la o vană de scurgere

a) Cu vana complet deschisă şi $R_{H1} \to \infty$, curgerea se produce gravitaţional din rezervorul 2, prin conducta 2 şi vană, ieşirea fiind în atmosferă, la presiunea P_0. Se vor evalua mărimile specifice curgerii, pentru două regimuri de funcţionare: (i) iniţial, pentru 20 de secunde, fără aport de debit din exterior; (ii) ulterior, sub acţiunea unui semnal treaptă de debit din exterior (240 l/s). Aplicaţie numerică: volumul iniţial de apă din rezervor V_2 = 2,5 m^3/s, secţiunea vasului A_2 = 0,025 m^2, $C_{H2} = 2{,}3767 \cdot 10^{-7}$ m^5/N, $R_{H2} = 2{,}1038 \cdot 10^5$ Ns/m^5.
Ecuaţia diferenţială specifică curgerii studiate este:

$$\frac{d(P_2 - P_0)}{dt} = R_{H2}\frac{dQ_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_{H2}} \tag{I.6.50}$$

Rezultatele simulării numerice sunt prezentate mai jos (fig. I.6.18):

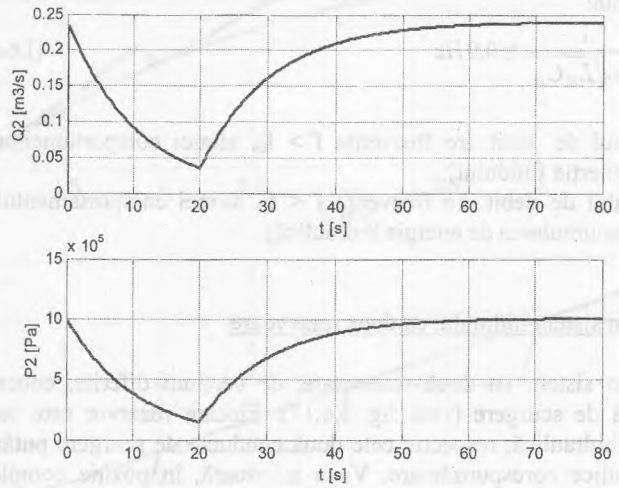


Fig. I.6.18 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul a)

b) Cu vana complet deschisă, curgerea se produce gravitaţional din rezervoarele 1 şi 2, prin conductele 1 şi 2, respectiv vană, ieşirea fiind în atmosferă, la presiunea P_0. Se vor evalua mărimile specifice curgerii, pentru următoarea aplicaţie numerică: volumele iniţiale de apă din rezervoare: V_1 = 10 m^3/s şi V_2 = 2,5 m^3/s, secţiunile vaselor: $A_1 = 4 \cdot 0{,}025$ m^2 şi A_2 = 0,025

m^2, capacitățile hidraulice ale rezervoarelor: C_{H1} = 4·2,3767·10^{-7} m^5/N, C_{H2} = 2,3767·10^{-7} m^5/N, rezistențele hidraulice ale conductelor: R_{H1} = 10·2,1038·10^5 Ns/m5, R_{H2} = 2,1038·10^5 Ns/m^5.

Ecuațiile diferențiale specifice curgerii studiate sunt:

$$\frac{d(P_1 - P_0)}{dt} = R_{H1}\frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_{H1}} \tag{I.6.51}$$

$$\frac{d(P_2 - P_0)}{dt} = R_{H2}\frac{dQ_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_{H2}} \tag{I.6.52}$$

Rezultatele simulării numerice sunt prezentate mai jos (fig. I.6.19):

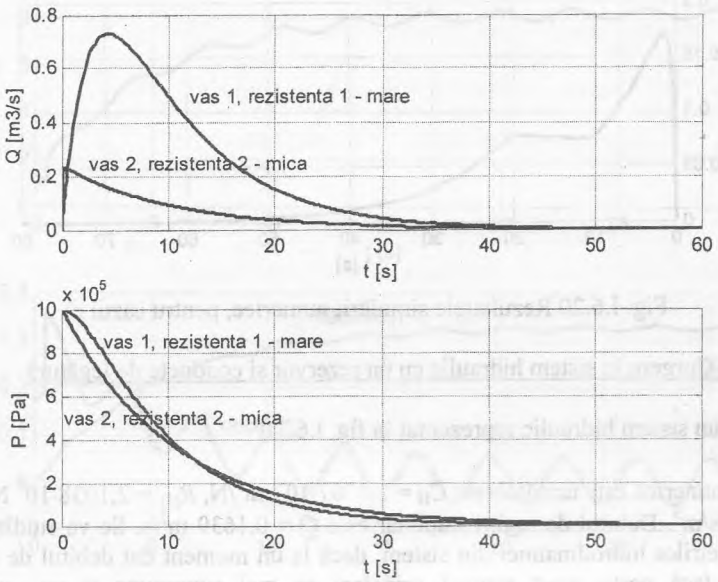


Fig. I.6.19 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul b)

c) Cu vana complet închisă, curgerea se produce gravitațional din rezervorul 1, prin conducta 1 și 2, către rezervorul 2. Se vor evalua mărimile specifice curgerii, pentru trei regimuri de funcționare: (i) inițial, pentru 10 de secunde, fără aport de debit din exterior; (ii) ulterior, până la momentul t = 20 s, se aplică numai un semnal treaptă de debit din exterior, în vasul 1 (400 l/s), (iii) după momentul t = 20 s, se adaugă la precedenta situație un semnal treaptă de debit din exterior, în vasul 2 (100 l/s). Aplicație numerică: volumul inițial de apă din rezervoare: V_1 = 20 m^3/s, V_2 = 2,5 m^3/s, secțiunile vaselor: A_1 = 4·0,025 m^2 și A_2 = 0,025 m^2, capacitățile hidraulice ale rezervoarelor: C_{H1} = 4·2,3767·10^{-7} m^5/N, C_{H2} = 2,3767·10^{-7} m^5/N, rezistențele hidraulice ale conductelor: R_{H1} = 10·2,1038·10^5 Ns/m5, R_{H2} = 2,1038·10^5 Ns/m^5.

Ecuația diferențială specifică curgerii studiate este:

$$\frac{d(P_1 - P_2)}{dt} = (R_{H1} + R_{H2})\frac{dQ}{dt} + Q\left(\frac{1}{C_{H1}} + \frac{1}{C_{H2}}\right) \tag{I.6.53}$$

Rezultatele simulării numerice sunt prezentate mai jos (fig. I.6.20):

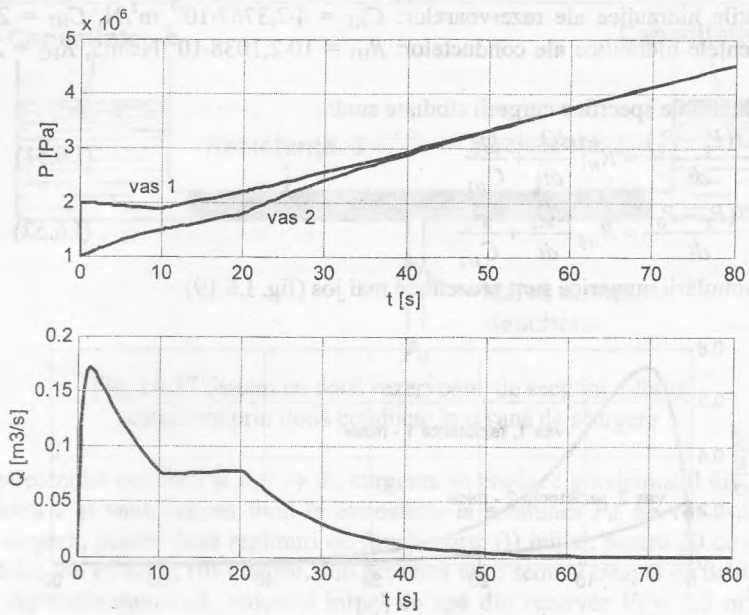


Fig. I.6.20 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul c)

I.6.13 Curgere în sistem hidraulic cu un rezervor şi conducte de legătură

Se consideră un sistem hidraulic reprezentat în fig. I.6.21.

a) Aplicația numerică este următoarea: $C_H = 2{,}3767 \cdot 10^{-6}$ m^5/N, $R_{H1} = 2{,}1038 \cdot 10^6$ Ns/m^5, $R_{H2} = 4{,}2076 \cdot 10^5$ Ns/m^5. Debitul de regim staționar este $Q = 0{,}1639$ m^3/s. Se va studia evoluția în timp a parametrilor hidrodinamici din sistem, dacă la un moment dat debitul de intrare Q se dublează şi dacă peste acest semnal principal se mai suprapune şi un „zgomot", de amplitudine 0,05 m^3/s şi pulsație 2 rad/s.

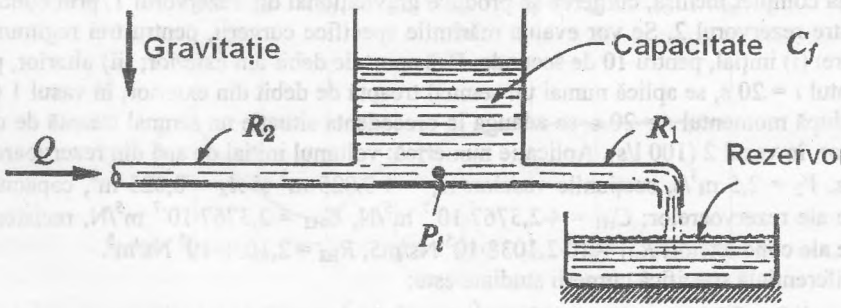


Fig. I.6.21 Sistem hidraulic cu un rezervor şi conducte de legătură

Ecuațiile care caracterizează funcționarea acestui sistem sunt:

$$\begin{cases} Q = Q_{CH} + Q_{RH1} \\ \dfrac{dP_t}{dt} = \dfrac{Q_{CH}}{C_H} \\ P_i - P_t = R_{H2} Q \\ P_t = R_{H1} Q_{RH1} \end{cases} \tag{I.6.54}$$

Rezultatele simulării numerice sunt prezentate mai jos (fig. I.6.22):

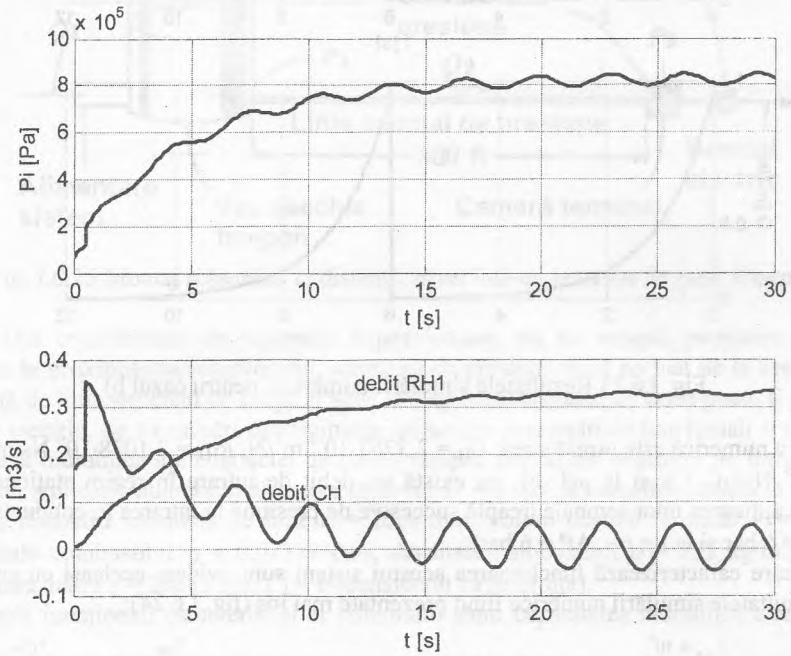


Fig. I.6.22 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul a)

Se observă că amplitudinea oscilațiilor de debit din conducta de scurgere este semnificativ mai redusă decât corespondenta din rezervorul de capacitate C_H, evidențiind rolul de „filtru" jucat de sistemul $R_H - C_H$ studiat.

b) Aplicația numerică este următoarea: $C_H = 2{,}3767 \cdot 10^{-6}$ m^5/N, $R_{H1} \to \infty$, $R_{H2} = 4{,}2076 \cdot 10^5$ Ns/m^5. Aceste date corespund obturării scurgerii către rezervorul inferior și nu mai există un debit de intrare în regim staționar, ci se presupune aplicarea unor semnale treaptă succesive de presiune la intrarea în conducta R_{H2} (la $t = 0$, $\Delta P = 6$ bar și la $t = 6$ s, $\Delta P = 6$ bar).
Ecuațiile care caracterizează funcționarea acestui sistem sunt evident aceleași cu cele de la pct. a), rezultatele simulării numerice fiind prezentate mai jos (fig. I.6.23):

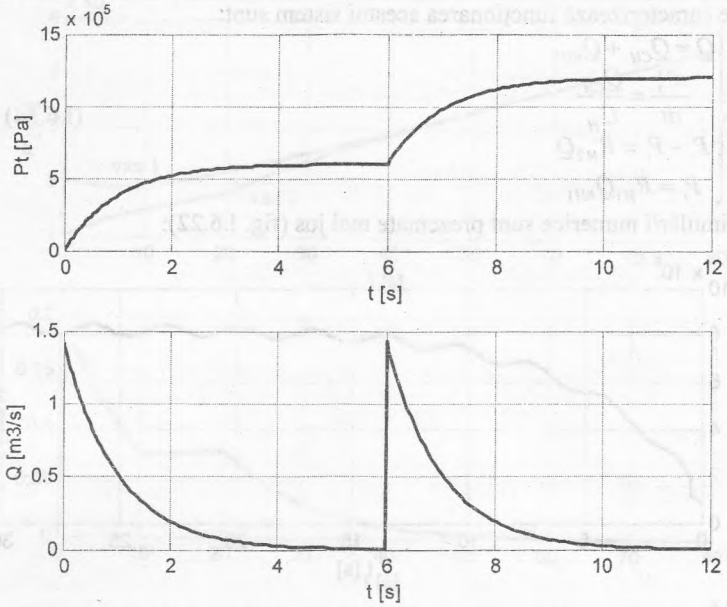


Fig. I.6.23 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul b)

c) Aplicaţia numerică este următoarea: $C_H = 2{,}3767 \cdot 10^{-6}$ m^5/N, $R_{H1} = 2{,}1038 \cdot 10^6$ Ns/m^5, $R_{H2} = 4{,}2076 \cdot 10^5$ Ns/m^5. Ca şi la pct. b), nu există un debit de intrare în regim staţionar, ci se presupune aplicarea unor semnale treaptă succesive de presiune la intrarea în conducta R_{H2} (la $t = 0$, $\Delta P = 6$ bar şi la $t = 6$ s, $\Delta P = 6$ bar).

Ecuaţiile care caracterizează funcţionarea acestui sistem sunt evident aceleaşi cu cele de la pct. a), rezultatele simulării numerice fiind prezentate mai jos (fig. I.6.24):

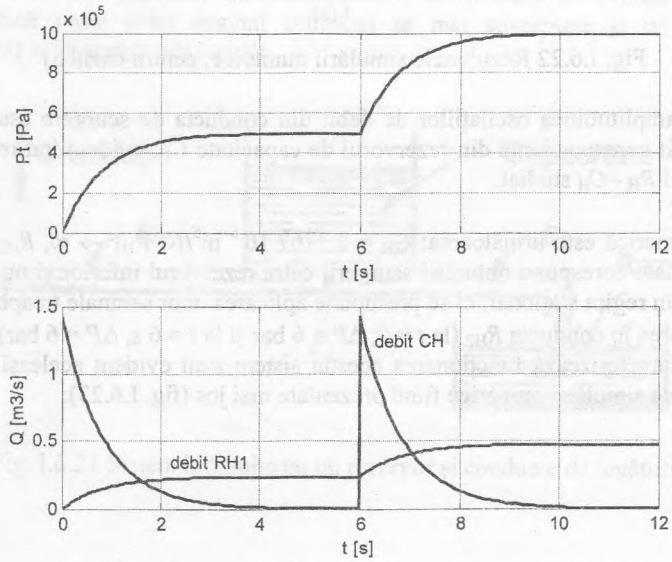


Fig. I.6.24 Rezultatele simulării numerice, pentru cazul c)

I.6.14 Traductor de presiune cu linie transmitere semnal

Pentru a măsura la distanță nivelul dintr-un rezervor de mari dimensiuni, de exemplu dintr-o rafinărie, se folosește un montaj prezentat în fig. I.6.25.

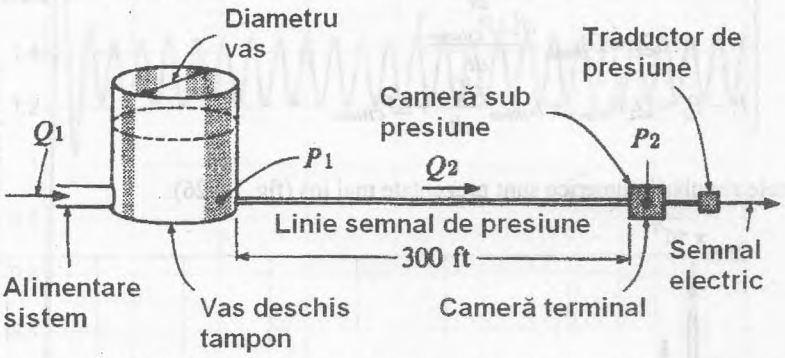


Fig. I.6.25 Montaj măsurare, la distanță, nivel într-un rezervor de mari dimensiuni

Din considerente de siguranță în exploatare, nu se acceptă montarea de cabluri electrice în proximitatea rezervorului, semnalul de presiune fiind preluat de la acesta printr-o conductă de linie suficient de lungă și adus la o cameră terminal, de unde poate fi preluat mai departe electric. Se va urmări determinarea influenței parametrilor funcționali – rezistență și inductanță hidraulice ale conductei de linie – asupra propagării debitului pe linia de semnal hidraulic. Aplicație numerică: diametru rezervor D = 15,24 m, lungime conductă de linie l = 91,5 m, diametru conductă de linie d = 25,4 mm, volum cameră terminal V = 0,283 m^3, vâscozitate combustibil η = 0,01379 Pa·s, densitate combustibil ρ = 855 kg/m^3, modul de elasticitate lichid ε = 20685 bar, P_2 = 0 (considerat ca referință).

Parametrii funcționali caracteristici ai sistemului sunt: capacitatea hidraulică a rezervorului: $C_{Hrez} = \frac{\pi D^2}{4\rho g} = 0{,}0217 \frac{m^5}{N}$, rezistența hidraulică a conductei de linie: $R_{Hlinie} = \frac{128\eta l}{\pi d^4} = 123{,}575 \cdot 10^6 \frac{Ns}{m^5}$, inductanța hidraulică a conductei de linie: $L_{Hlinie} = \frac{4\rho l}{\pi d^2} = 154{,}5 \cdot 10^6 \frac{Ns^2}{m^5}$, capacitatea hidraulică a conductei de linie: $C_{Hlinie} = \frac{V_{linie}}{\varepsilon} = 2{,}24 \cdot 10^{-11} \frac{m^5}{N}$, capacitatea hidraulică a camerei terminal: $C_{Hter\,min\,al} = \frac{V}{\varepsilon} = 1{,}368 \cdot 10^{-10} \frac{m^5}{N}$.

Ecuațiile care determină funcționarea sistemului sunt următoarele:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_{Hechiv}} = \dfrac{1}{C_{Hlinie}} + \dfrac{1}{C_{Hter\,min\,al}} \\ Q_1 = Q_{vas} + Q_2 \\ Q_{vas} = C_{Hrez}\dfrac{dP_1}{dt} \\ Q_2 = C_{Hechiv}\dfrac{d(\Delta P_{CHechiv})}{dt} \\ P_1 - P_2 = Q_2 R_{Hlinie} + L_{Hlinie}\dfrac{dQ_2}{dt} + \Delta P_{CHechiv} \end{cases} \quad \text{(I.6.55)}$$

Rezultatele simulării numerice sunt prezentate mai jos (fig. I.6.26):

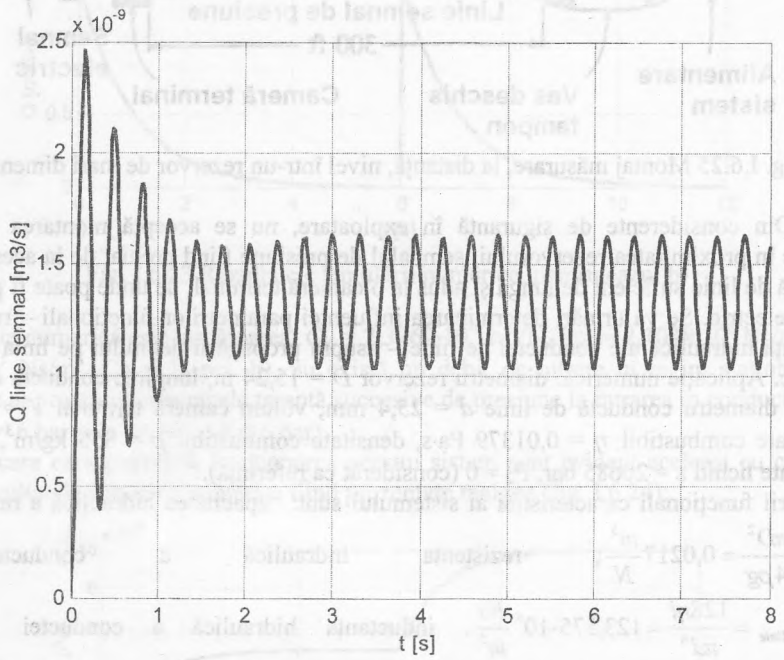


Fig. I.6.26 Rezultatele simulării numerice
cu parametrii funcționali caracteristici de bază

Se observă un regim oscilant neamortizat al semnalului de debit pe conducta de linie semnal. Vom interveni asupra parametrului funcțional rezistența hidraulică a conductei de linie R_{Hlinie}, prin mărirea sa de 10 ori. Rezultatul obținut este prezentat în graficul de mai jos (fig. I.6.27):

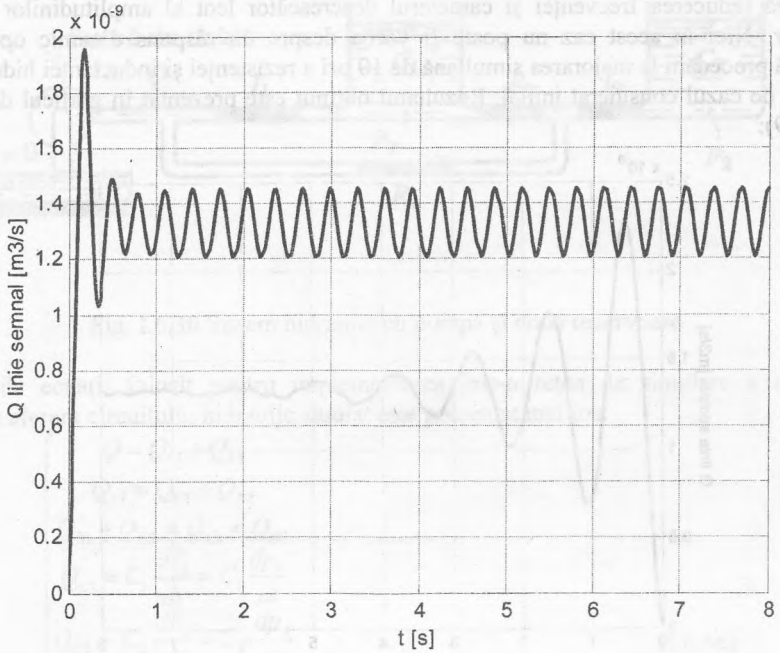


Fig. I.6.27 Rezultatele simulării numerice cu R_{Hlinie} mărit de 10 ori

Se observă reducerea amplitudinii oscilațiilor, dar frecvența acestora nu se modifică. În consecință, renunțăm la majorarea rezistenței hidraulice a conductei de linie și procedăm la majorarea de 10 ori a inductanței hidraulice a conductei de linie L_{Hlinie}. Rezultatul obținut este prezentat în graficul de mai jos (fig. I.6.28):

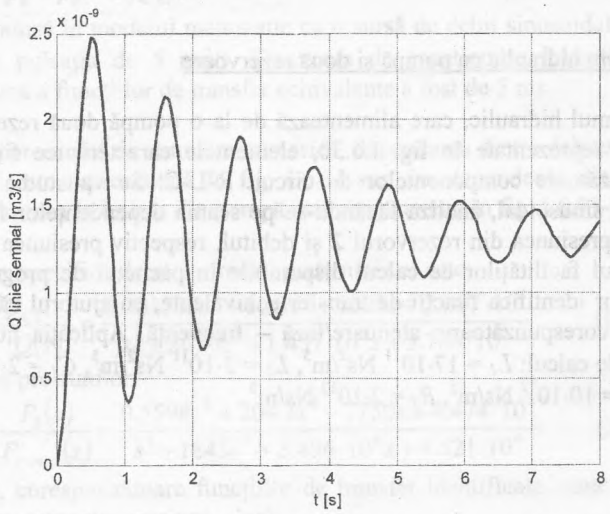


Fig. I.6.28 Rezultatele simulării numerice cu L_{Hlinie} mărit de 10 ori

Se observă reducerea frecvenţei şi caracterul descrescător lent al amplitudinilor mari ale oscilaţiilor. Nici în acest caz nu poate fi vorba despre un răspuns dinamic optim şi în consecinţă procedăm la majorarea simultană de 10 ori a rezistenţei şi inductanţei hidraulice de linie, faţă de cazul considerat iniţial. Rezultatul obţinut este prezentat în graficul de mai jos (fig. I.6.29):

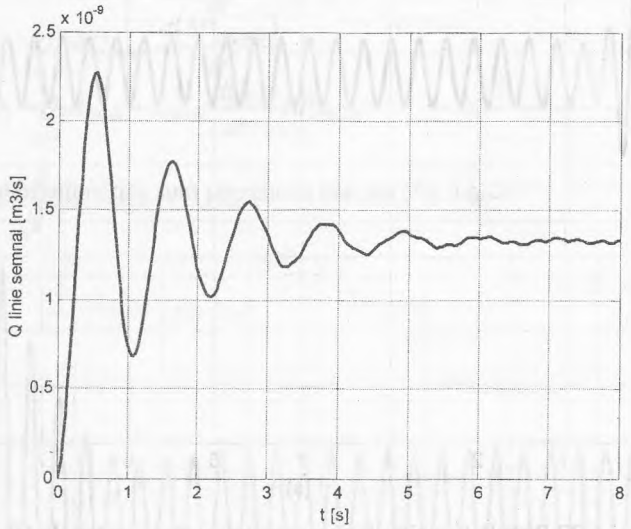


Fig. I.6.29 Rezultatele simulării numerice cu R_{Hlinie} şi L_{Hlinie} mărite simultan de 10 ori

Se observă combinarea celor două efecte corective discutate anterior, după un interval de cca. 6 s producându-se stabilizarea la un nivel optim a regimului de oscilaţie a debitului pe conducta de linie semnal.

I.6.15 Sistem hidraulic cu pompă şi două rezervoare

Se consideră sistemul hidraulic, care alimentează de la o pompă două rezervoare cu lichid, conform schemei reprezentate în fig. I.6.30, elementele caracteristice fiind marcate prin notaţiile corespunzătoare componentelor de circuit R-L-C. Se va studia comportamentul dinamic, în regim sinusoidal, analiza făcându-se pe seama dependenţelor funcţionale dintre debitul, respectiv presiunea din rezervorul 2 şi debitul, respectiv presiunea de la ieşirea din pompă. Cu ajutorul facilităţilor de calcul disponibile în pachetul de programe MATLAB-SIMULINK, se vor identifica funcţii de transfer echivalente, cu ajutorul cărora de vor trasa diagramele Bode corespunzătoare: atenuare/fază – frecvenţă. Aplicaţia numerică a folosit următoarele date de calcul: $L_1 = 17 \cdot 10^{11}$ Ns^2/m^5, $L_2 = 3 \cdot 10^{11}$ Ns^2/m^5, $C_1 = 2 \cdot 10^{-14}$ m^5/N, $C_2 = 10 \cdot 10^{-14}$ m^5/N, $R_1 = 10 \cdot 10^{12}$ Ns/m^5, $R_2 = 2 \cdot 10^{12}$ Ns/m^5.

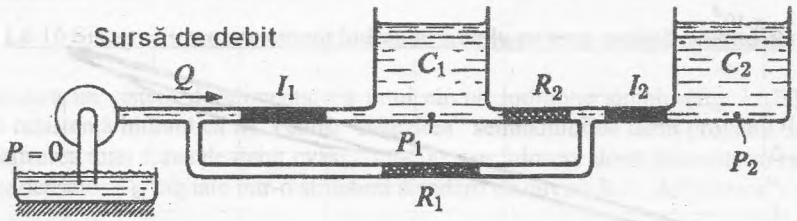


Fig. I.6.30 Sistem hidraulic cu pompă şi două rezervoare

Sistemul de ecuaţii folosit pentru implementarea într-o reţea de simulare a modelului matematic aferent circuitului hidraulic studiat este prezentat mai jos:

$$\begin{cases} Q = Q_{L1} + Q_{R1} \\ Q_{L1} = Q_{C1} + Q_{R2} \\ Q_{R1} + Q_{R2} = Q_{L2} = Q_{C2} \\ Q_{C1} = C_1 \dfrac{dP_1}{dt} = C_1 \dfrac{dp_b}{dt} \\ Q_{C2} = C_2 \dfrac{dP_2}{dt} = C_2 \dfrac{dp_d}{dt} \\ p_a - p_b = L_1 \dfrac{dQ_{L1}}{dt} \\ p_c - p_d = L_2 \dfrac{dQ_{L2}}{dt} \\ p_a - p_c = R_1 Q_{R1} \\ p_b - p_c = R_2 Q_{R2} \end{cases} \qquad \text{(I.6.56)}$$

Pompa a fost introdusă în modelul matematic ca o sursă de debit sinusoidal, cu amplitudinea de $2 \cdot 10^{-6}$ m^3/s şi pulsaţia de 5 rad/s. Frecvenţa de eşantionare folosită în procesul de identificare dinamică a funcţiilor de transfer echivalente a fost de 5 ms.

În urma derulării porcesului de simulare numerică, dependenţa dintre debitul din rezervorul 2 şi debitul pompei este reprezentată în fig. I.6.31-sus, iar dependenţa dintre presiunea din rezervorul 2 şi presiunea la ieşirea din pompă este reprezentată în fig. I.6.31-jos.

Funcţia de transfer, specifică debitelor menţionate mai sus este:

$$H_Q = \frac{Q_{C2}(s)}{Q(s)} = \frac{0.001503s^3 + 16.3s^2 + 7003s + 2.887 \cdot 10^5}{s^3 + 2010s^2 + 1.451 \cdot 10^4 s + 3.786 \cdot 10^5}, \qquad \text{(I.6.57)}$$

respectiv, specifică presiunilor:

$$H_P = \frac{P_2(s)}{P_{Pompa}(s)} = \frac{0.5598s^3 + 204.3s^2 - 7750s + 4.474 \cdot 10^4}{s^3 + 1843s^2 + 3.496 \cdot 10^4 s + 4.521 \cdot 10^4} \qquad \text{(I.6.58)}$$

Diagramele Bode, corespunzătoare funcţiilor de transfer identificate, sunt prezentate în fig. I.6.32 (debite – sus, respectiv presiuni – jos).

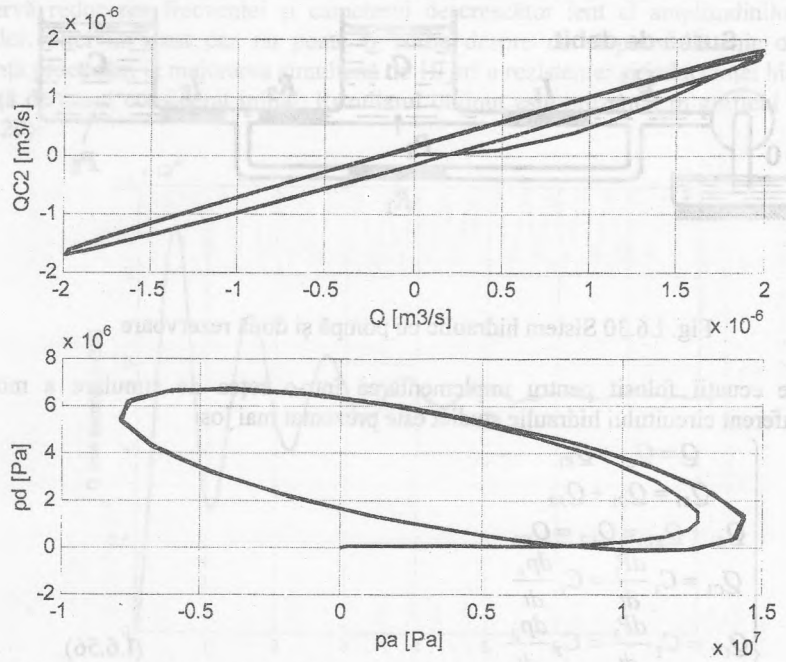


Fig. I.6.31 Dependența dintre debitul din rezervorul 2 şi debitul pompei – sus şi dependența dintre presiunea din rezervorul 2 şi presiunea la ieşirea din pompă - jos

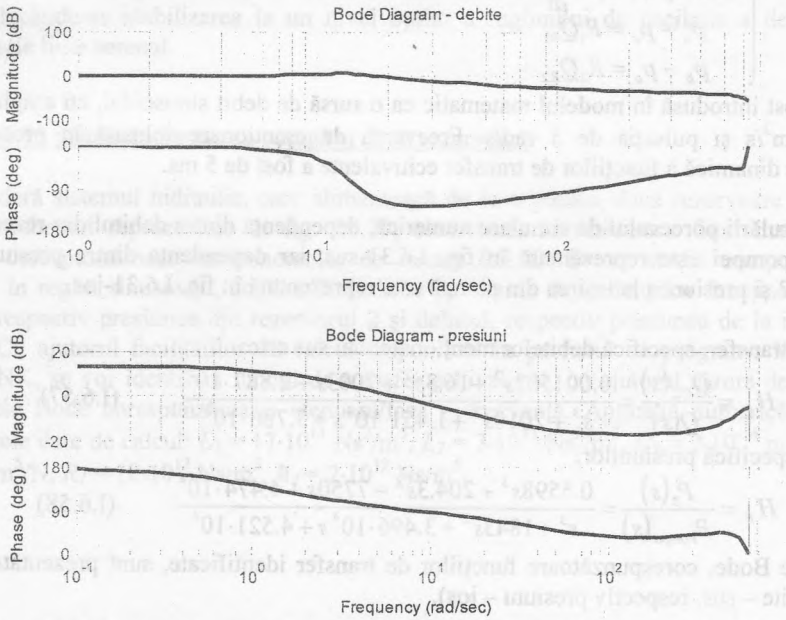


Fig. I.6.32 Diagramele Bode, corespunzătoare funcțiilor de transfer identificate

I.6.16 Sistem alimentare circuit hidraulic simplu cu grup pompă-acumulator

Se consideră un sistem de alimentare a unui circuit hidraulic simplu (fig. I.6.33), modelat printr-o rezistență hidraulică R_2. Pentru "netezirea" semnalului de debit provenit de la pompă Q_s – realizarea unei surse de debit cvasi continuu - se folosesc două elemente: o rezistență R_1 și un condensator C_k, cuplate într-o structură standard de circuit R-C, de "filtrare".

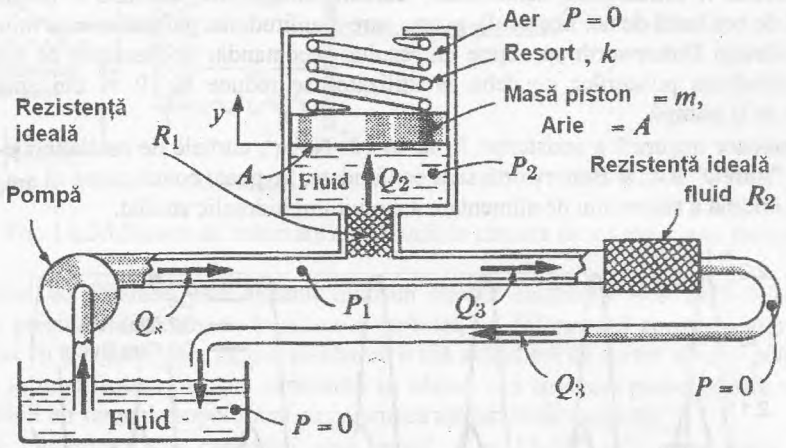


Fig. I.6.33 Sistem alimentare circuit hidraulic simplu cu grup pompă-acumulator

Pompa cu pistoane produce un debit pulsatoriu, descris de următoarea ecuație:

$$Q_s = Q_0(1+\varepsilon \sin \omega t) \tag{I.6.59}$$

unde: Q_0 = 2 l/s este debitul mediu, ε = 0.1 este coeficientul amplitudinii componentei pulsatorii a debitului, iar ω = 10 rad/s este pulsația sinusoidală a semnalului oscilant considerat.

Pe baza acestei ecuații, scopul "filtrării" este diminuarea, cât mai mult posibil, a componentei $Q_0(\varepsilon \sin \omega t)$, astfel încât debitul prin rezistența hidraulică R_2 să fie practic constant Q_0.

Ecuațiile care determină funcționarea acestui sistem sunt:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = P_2 A \\ Q_s = Q_1 + Q_2 \\ Q_1 = A\dot{x} \\ P_1 - P_2 = R_1 Q_1 \\ P_1 = R_2 Q_2 \end{cases} \tag{I.6.60}$$

unde: m = 200 g este masa pistonului condensatorului hidraulic, $f \cong 0$ Ns/m (neglijabil) este coeficientul de frecare vâscoasă piston – cilindru condensator, k = 20 kN/m este constanta elastică a resortului elastic din camera pasivă a condensatorului, $A = 64 \cdot 10^{-4}$ m^2 este aria pistonului condensatorului, $R_1 = 10^7$ Ns/m^5, $R_2 = 9 \cdot 10^7$ Ns/m^5.

Prin aplicarea transformatei Laplace ecuațiilor de mai sus, se poate obține funcția de transfer următoare:

$$H(s) = \frac{x(s)}{Q_s(s)} = \frac{R_2 A}{ms^2 + \left[f + (R_1 + R_2)A^2\right]s + k} \tag{I.6.61}$$

Sub această formă, este mai uşoară analiza influenţei unor parametri funcţionali şi de acordare asupra performanţelor de "filtrare" ale sistemului studiat.

Ca element de comparaţie calitativ, se foloseşte în simulare şi un filtru analog standard, de tip Butterworth (trece-jos, de ordinul 1), aflat în biblioteca de programe a pachetului de programe MATLAB-SIMULINK.

Variaţia în timp a debitelor Q_s şi Q_2 este redată în fig. I.6.34. Se observă diminuarea amplitudinii semnalului de debit, în urma introducerii "filtrului" R-C. Aria pistonului condensatorului A influenţează semnificativ curbele funcţionale, existând o valoare optimă (apropiată de cea luată de noi în calcul), pentru care amplitudinea pulsaţiilor este minimă.

În cazul filtrului Butterworth se obţine un rezultat recomandat în literatura de specialitate, când amplitudinea pulsaţiilor de debit la utilizator se reduce la 10 % din amplitudinea pulsaţiilor de la pompă.

Pentru o valoare majorată a rezistenţei R_2 la $45 \cdot 10^7$ Ns/m^5, curbele de oscilaţie ale debitului Q_2 pentru "filtrele" R-C şi Butterworth sunt confundate. Se poate concluziona că s-a realizat o proiectare optimă a sistemului de alimentare a circuitului hidraulic studiat.

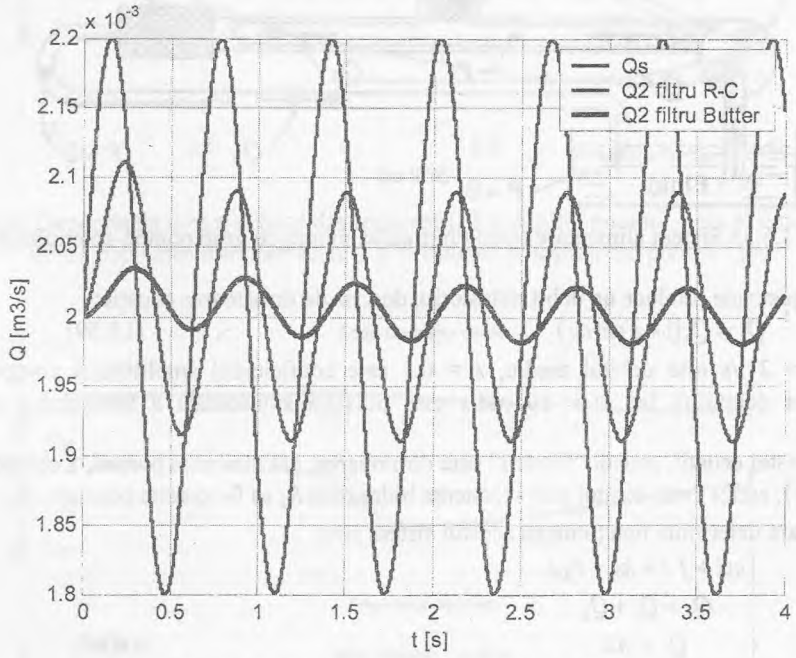


Fig. I.6.34 Variaţia în timp a debitelor Q_s şi Q_2

I.6.17 Sistem de măsurare a presiunii în camera de ardere a unei rachete

Se consideră un sistem de măsurare a presiunii în camera de ardere a unei rachete (vezi fig. I.6.35). Pentru protejarea dispozitivului de măsurare, faţă de temperaturile ridicate din interiorul şi din proximitatea rachetei, se utilizează o linie relativ lungă de transmisie a semnalului hidraulic, plină cu un lichid practic incompresibil, având densitatea $\rho = 800$ kg/m^3 şi vâscozitatea dinamică $\eta = 0{,}1172$ Pa·s.

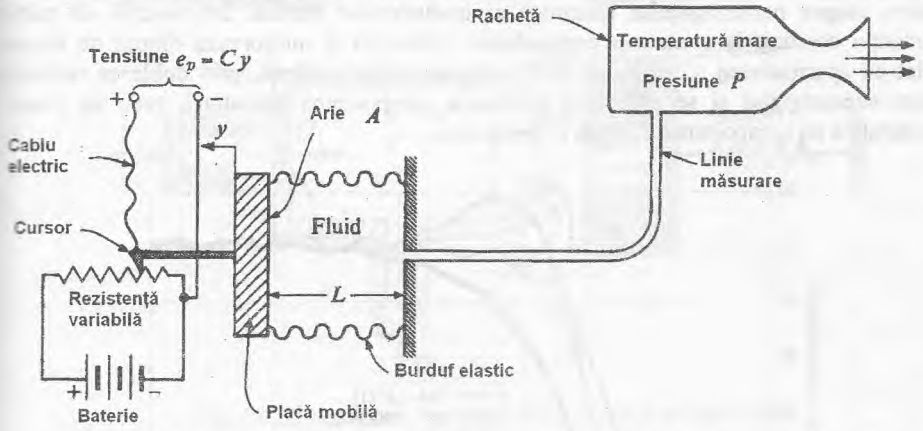


Fig. I.6.35 Sistem de măsurare a presiunii în camera de ardere a unei rachete

Traductorul de presiune este alcătuit dintr-un burduf elastic (k = 875670 N/m), care la creşterea presiunii din camera de ardere a rachetei, se deformează corespunzător. Burduful este închis cu un capac plan mobil, solidar cu o tijă având rol de cursor al unui potenţiometru reglabil; la modificarea poziţiei cursorului se obţine o o tensiune proporţională cu aceasta, deci implicit un semnal proporţional cu presiunea măsurată de traductor.

Aplicaţie numerică: aria capacului plan mobil $A = 13 \cdot 10^{-4}$ m^2; masa părţii mobile a traductorului m = 0,45 kg; lungimea burdufului nedeformat L = 15,2 mm; constanta potenţiometrului, utilizat ca voltmetru C_v = 3937 V/m; diametrul liniei de transmisie presiune d = 2,5 mm; lungimea liniei de transmisie presiune l = 762 mm. Cu aceste date, linia de transmisie presiune se caracterizează prin următoarele elemente de circuit: $R_H = \dfrac{128\eta l}{\pi d^4} = 9{,}315 \cdot 10^{10} \dfrac{Ns}{m^5}$ şi $L_H = \dfrac{4\rho l}{\pi d^2} = 1{,}242 \cdot 10^8 \dfrac{Ns^2}{m^5}$.

Ecuaţiile care descriu funcţionarea traducstorului de presiune sunt:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = P_A A - ky \\ P_A - P = R_H Q + L_H \dfrac{dQ}{dt} \\ Q = A\dot{y} \\ e_P = C_v y \end{cases} \qquad \text{(I.6.62)}$$

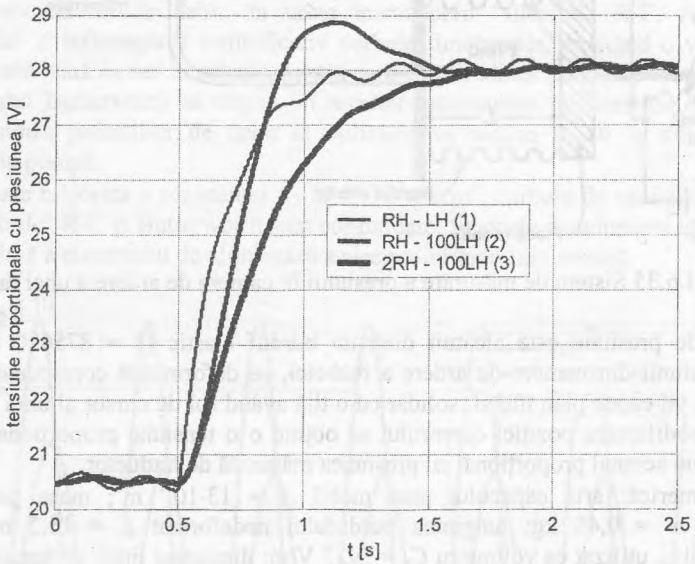
Prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiilor de mai sus, se poate obţine funcţia de transfer următoare:

$$H(s) = \frac{y(s)}{P(s)} = \frac{A}{\left(m + L_H A^2\right)s^2 + R_H A^2 s + k} \qquad \text{(I.6.63)}$$

Sub această formă, este mai uşoară analiza influenţei unor parametri funcţionali asupra performanţelor sistemului studiat.

În simularea numerică a funcţionării traductorului de presiune, se presupune că iniţial presiunea are o componentă continuă de 35 bar, peste care se suprapune o componentă oscilantă, cu amplitudinea de 1 bar şi pulsaţia de 25 rad/s. La momentul de timp t = 0,5 s, se aplică o creştere treaptă a componentei continue de la 35 bar la 48 bar, componenta pulsatorie rămânând neschimbată. Variaţia în timp a tensiunii electrice proporţionale cu presiunea (e_P), din camera de ardere a rachetei, este reprezentată în fig. I.6.36. Prin intermediul variaţiei parametrilor concentraţi ai liniei de transmisie a presiunii R_H-L_H, se pune în evidenţă influenţa

acestora asupra performanţelor dinamice ai traductorului studiat. Se observă că mărirea inductanţei conduce la atenuarea componentei pulsatorii şi micşorează timpul de răspuns, corelat cu apariţia unui suprareglaj. Menţinând inductanţa mărită, prin dublarea rezistenţei dispare suprareglajul şi se păstrează atenuarea componentei pulsatorii, ceea ce poate fi considerat ca un comportament optim al sistemului.



(1) $R_H = 9{,}315 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5, $L_H = 1{,}242 \cdot 10^8$ Ns^2/m^5
(2) $R_H = 9{,}315 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5, $L_H = 1{,}242 \cdot 10^{10}$ Ns^2/m^5
(3) $R_H = 2 \cdot 9{,}315 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5, $L_H = 1{,}242 \cdot 10^{10}$ Ns^2/m^5

Fig. I.6.36 Variaţia în timp a tensiunii electrice proporţionale cu presiunea (e_P), din camera de ardere a rachetei

I.6.18 Supapă de reglare a presiunii

În fig. I.6.37 este prezentată structura constructiv-funcţională simplificată a unei supape de reglare a presiunii. În regim staţionar, între presiunea reglată P şi forţa din resortul elastic – proporţională cu deformarea sa – există o relaţie de legătură. De ex. la o presiune P_{reg} = 17,25 bar, corespunde o lăţime a secţiunii inelare de curgere x_0 = 0,254 mm, când ecuaţia de echilibru se scrie: $F_{elastic} = k(x_0 + x_{0e}) = P_{reg}\dfrac{\pi d^2}{4}$, constanta elastică fiind k = 17515 N/m, diametrul orificiului ajutajului d = 6,35 mm, iar precomprimarea resortului x_{0e} = 2,86 mm.

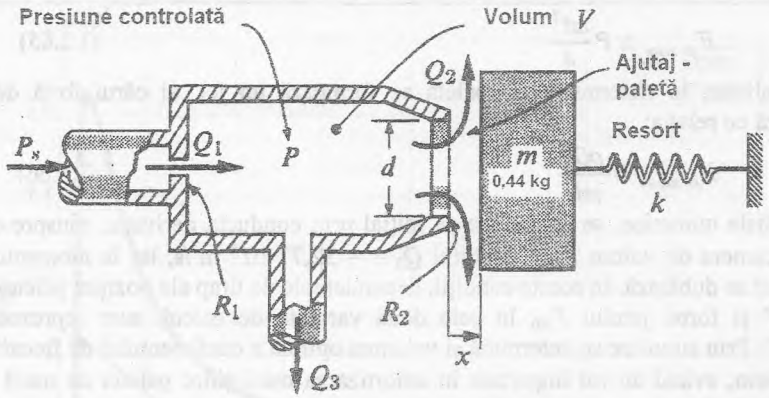


Fig. I.6.37 Structura constructiv-funcțională simplificată a unei supape de reglare a presiunii

Funcționarea supapei poate fi explicată astfel: dacă presiunea P tinde să crească, atunci resortul se deformează mai mult şi implicit deschiderea supapei x creşte, fapt care conduce la mărirea debitului Q_2. Această tendință atrage după sine diminuarea presiunii P, contrar tendinței presupuse. În acest fel, sistemul menține presiunea aproximativ constantă, în jurul valorii reglate.

În funcționare intervin două rezistențe hidraulice: una fixă sub forma unui orificiu calibrat, $R_1 = 4{,}2076 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5 şi una reglabilă, caracterizată prin ecuația: $R_2 = \frac{C_2}{\pi d x}$, având valoarea $R_2 = 4{,}2076 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5, când $x = x_0 = 0{,}254$ mm. În relația precedentă, C_2 este o constantă, dată de ecuația: $C_2 = \pi d x_0 R_2 = 2{,}132 \cdot 10^5 \frac{Ns}{m^3}$.

Volumul de lichid cuprins între orificiul calibrat, ajutaj şi derivația (consumatorul), prin care curge debitul Q_3 este: $V_{camera} = 3{,}2774 \cdot 10^{-5} m^3$. Modulul de elasticitate echivalent al lichidului de lucru este $\varepsilon = 6892$ bar, densitatea sa este $\rho = 900$ kg/m^3. În aceste condiții, camera de volum V_{camera} se comportă ca un condensator hidraulic de capacitate: $C_H = \frac{V_{camera}}{\varepsilon} = 4{,}755 \cdot 10^{-14} \frac{m^5}{N}$.

Masa paletei, solidară cu resortul elastic şi asupra căreia acționează jetul ajutajului, de diametru d, este $m = 0{,}445$ kg.

Presiunea sursei de alimentare a consumatorului este $P_s = 60$ bar.

Ecuațiile care descriu funcționarea supapei de reglare a presiunii sunt:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = F_{jet} - kx_{0e} \\ Q_1 = Q_{CH} + Q_2 + Q_3 \\ Q_1 = \dfrac{P_s - P}{R_1} \\ Q_2 = \dfrac{P}{R_2} \end{cases} \qquad \text{(I.6.64)}$$

Pentru calculul forței jetului de lichid se utilizează două relații de calcul:

a) Lățimea secțiunii de curgere din sistemul ajutaj-paletă x fiind mică, se presupune o distribuție uniformă – statică a presiunii pe suprafața paletei şi atunci:

$$F_{jet\ static} \cong P\frac{\pi d^2}{4} \qquad \text{(I.6.65)}$$

b) În realitate, în sistemul ajutaj-paletă se formează un jet, al cărui forţă de impuls se calculează cu relaţia:

$$F_{jet\ impuls} = \frac{\rho Q_2^2}{\pi d x} \qquad \text{(I.6.66)}$$

În simulările numerice, se presupune că iniţial prin conducta derivaţie, dinspre consumator, intră în camera de volum V_{camera} debitul $Q_3 = -32{,}77\cdot10^{-4}$ m^3/s, iar la momentul $t = 1$ ms acest debit se dublează. În aceste condiţii, dependenţele de timp ale poziţiei paletei x, presiunii reglate P şi forţei jetului F_{jet}, în cele două variante de calcul, sunt reprezentate în fig. I.6.38÷40. Prin simulare se determină şi valoarea optimă a coeficientului de frecare vâscoasă $f \cong 400$ Ns/m, având un rol important în amortizarea oscilaţiilor paletei de masă m, deci rol stabilizator în funcţionarea supapei de reglare a presiunii.

Din analiza curbelor, se observă diferenţe semnificative între rezultatele obţinute prin cele două metode de calcul ale forţei jetului F_{jet}, alura curbelor fiind similară. Sunt de remarcat secţiuni de curgere de lăţime x mai mici la metoda "impuls", un salt de presiune mai mare şi un efect regulator (de revenire la presiunea iniţială) mai bun la metoda "impuls", în strânsă corelaţie cu curbele de variaţie ale forţei jetului, de tip "static" şi "impuls".

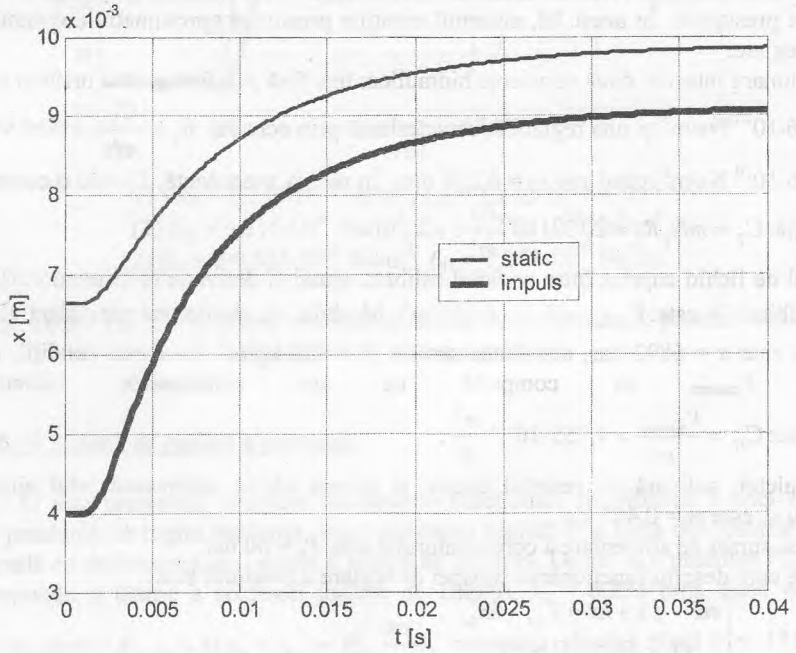


Fig. I.6.38 Dependenţa de timp a poziţiei paletei x

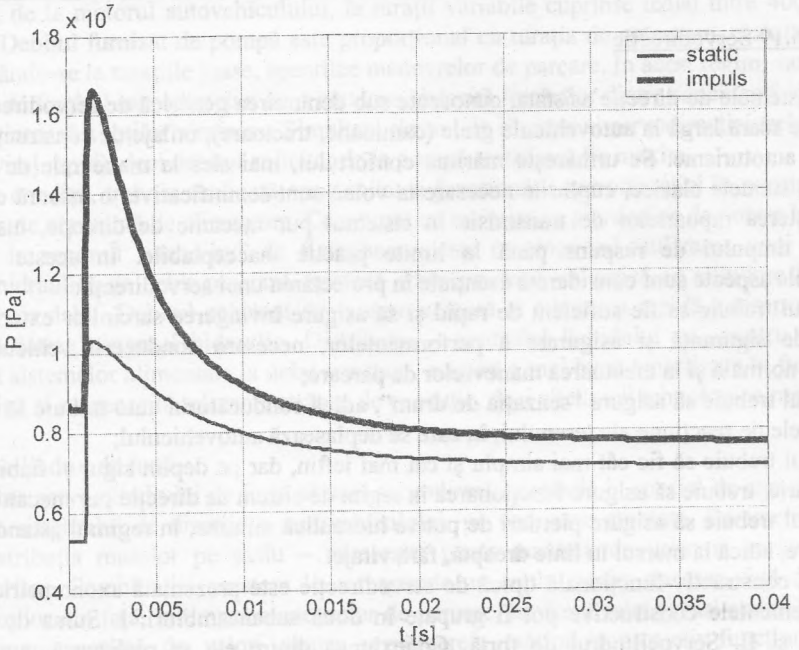


Fig. I.6.39 Dependența de timp a presiunii reglate P

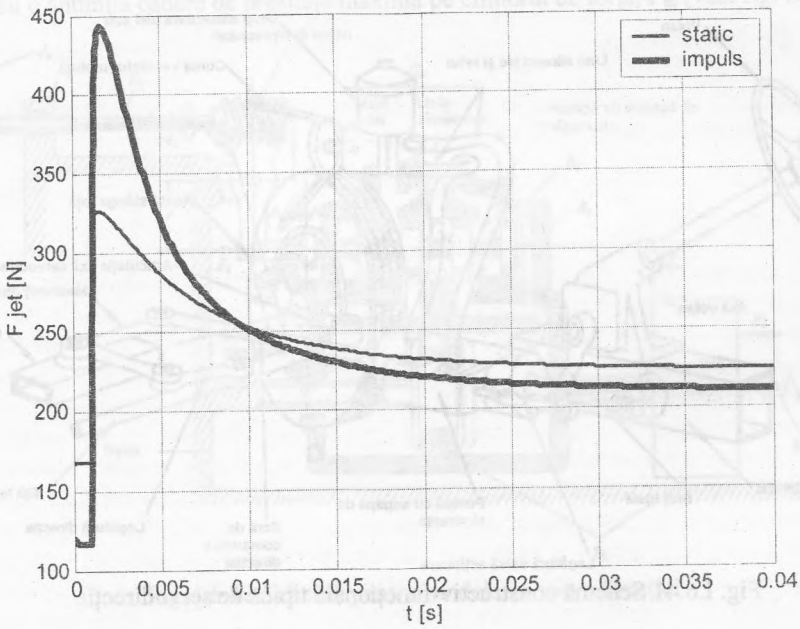


Fig. I.6.40 Dependența de timp a forței jetului F_{jet}

I.6.19 Servodirecţie

Sistemele de direcţie asistată, cunoscute sub denumirea generică de servodirecţii, sunt folosite pe scară largă la autovehicule grele (camioane, tractoare), utilaje de construcţii şi mai recent la autoturisme. Se urmăreşte mărirea confortului, mai ales la manevrele de parcare, când, în sistemele clasice, cuplurile necesare la volan sunt semnificative; o măsură corectivă ar fi creşterea rapoartelor de transmisie în sistemul pur mecanic de direcţie, însoţită de creşterea timpului de răspuns până la limite practic inacceptabile. În aceste condiţii, următoarele aspecte sunt considerate esenţiale în proiectarea unei servodirecţii:

a) Sistemul trebuie să fie suficient de rapid şi să asigure învingerea sarcinilor exterioare, în condiţii de siguranţă şi asigurare a performanţelor, necesare conducerii vehiculului, la deplasare normală şi la efectuarea manevrelor de parcare;

b) Sistemul trebuie să asigure "senzaţia de drum", adică conducătorul auto trebuie să simtă la volan forţele de reacţiune ale terenului, în care se deplasează autovehiculul;

c) Sistemul trebuie să fie cât mai simplu şi cât mai ieftin, dar pe deplin sigur şi fiabil, iar, în caz de avarie, trebuie să asigure funcţionarea în regim de sistem de direcţie pur mecanic;

d) Sistemul trebuie să asigure pierderi de putere hidraulică minime, în regimul „stand-by" de funcţionare, adică la mersul în linie dreaptă, fără viraje.

O schemă constructiv-funcţională tipică de servodirecţie este prezentată axonometric în fig. I.6.41. Elementele constructive pot fi grupate în două subansambluri: I. Sursa de energie hidraulică şi II. Servocilindrul de forţă. Conexiunea dintre ele se realizează numai prin circuite hidraulice (proiectarea fiecăruia putând fi realizată separat), iar interfaţa lor asigură compatibilizarea performanţelor funcţionale.

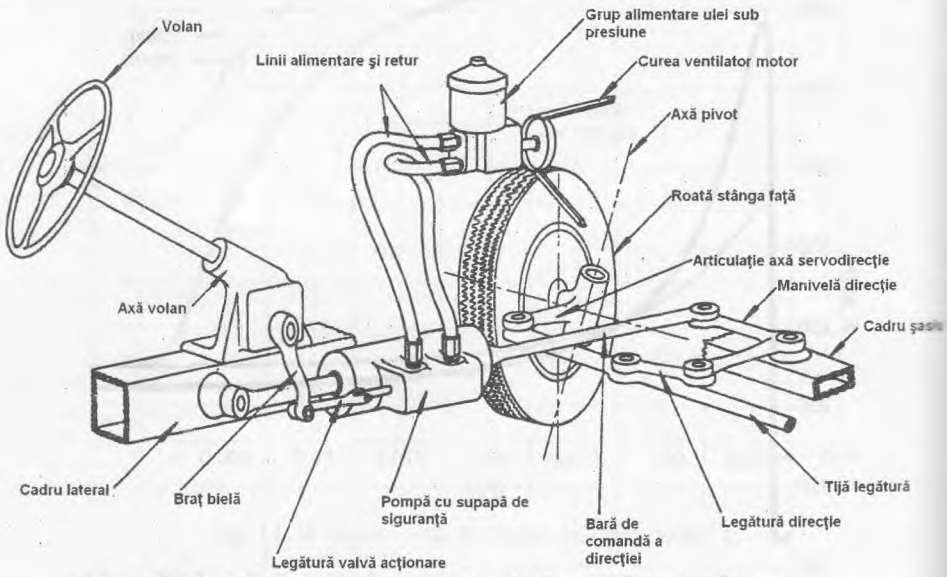


Fig. I.6.41 Schemă constructiv-funcţională tipică de servodirecţie

I. Sursa de energie hidraulică

O sursa de energie hidraulică tipică este alcătuită dintr-o pompă volumică, un sistem de protecţie contra suprapresiunilor (supapă de siguranţă) şi elemente conexe, de tipul rezervorului, filtrului de aspiraţie etc. Pompa va fi antrenată continuu, printr-un sistem

mecanic, de la motorul autovehiculului, la turaţii variabile cuprinse uzual între 400 şi 4000 rot/min. Debitul furnizat de pompă este proporţional cu turaţia de antrenare, cerinţa maximă manifestându-se la turaţiile joase, specifice manevrelor de parcare. În acest regim, sarcinile pe cilindrul de forţă al servodirecţiei sunt maxime, datorită frecărilor dintre cauciucuri şi teren, la bracarea intensă a roţilor viratoare. Simultan, timpul de răspuns al servodirecţiei trebuie să fie minim (viraj rapid), deci debitul solicitat de la pompă trebuie să fie maxim.

În aceste condiţii, trebuie analizată oportunitatea funcţionării servodirecţiei în regim de debit sau presiune constantă de alimentare. Coroborat cu necesitatea pierderilor de putere hidraulică minime, în regimul „stand-by" de funcţionare, este recomandată utilizarea unei surse de energie hidraulică de debit constant, formată dintr-o pompă volumică cu cilindree fixă şi un regulator de debit. Debitul constant din sistem asigură şi atingerea rapidă a temperaturii de regim în întreg sistemul hidraulic. Distribuţia – controlul lichidului cu „centru deschis", specifică sistemelor alimentate la debit constant, asigură o mai bună amortizare în funcţionare sub sarcină şi nu necesită toleranţe strânse de execuţie, deci cheltuieli tehnologice mai reduse.

II. Servocilindrul de forţă

Proiectarea servocilindrului de forţă al unei servodirecţii depinde în special de caracteristicile specifice sistemului de direcţie a autovehiculului, pe care este montată. Parametrii impuşi sunt: distribuţia maselor pe şasiu – caroserie, panta maximă de urcat şi caracteristicile cauciucurilor. Combinaţiei acestora le corespunde un cuplu minim necesar, faţă de axa de viraj a roţilor din faţă, în timpul manevrelor de parcare, la viteze mici (cvasi-statice). Rezultă o combinaţie optimă de valori pentru următoarele mărimi constructiv-funcţionale: aria pistonului cilindrului de forţă A_m, pentru o anumită rază de articulare a tijei de comandă a sertarului distribuitorului, faţă de centrul de rotaţie a mecanismului cremalieră – roată dinţată, r şi pentru o anumită cădere de presiune maximă pe cilindrul de forţă, P_m (vezi fig. I.6.42).

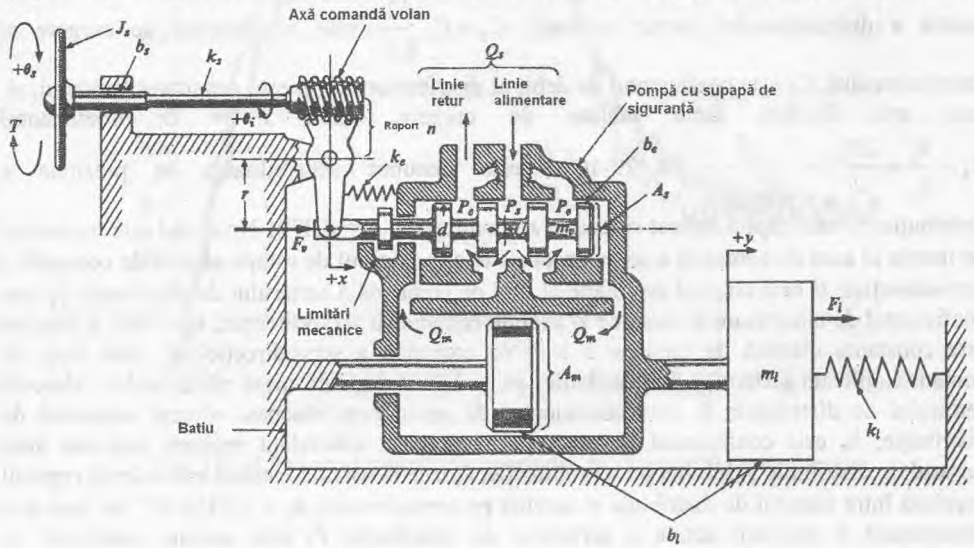


Fig. I.6.42 Schemă pentru modelarea servodirecţiei

Raza r a fost inclusă în enumerarea anterioară, deoarece pentru realizarea "senzaţiei de drum" se aplică căderea de presiune P_m pe capetele sertarului distribuitorului de reglare, articulat cu tija de comandă. Acest aspect influenţează direct cuplul de comandă aplicat volanului

servodirecției. Aria A_m şi căderea de presiune P_m sunt corelate cu sarcina exterioară maximă, care acționează pe servocilindrul de forță.

Ecuațiile care descriu funcționarea servodirecției mecano-hidraulice sunt:

$$\begin{cases} Q_m = k_1(x-y) - k_2 P_m \\ T = J_s\ddot{\theta}_s + b_s\dot{\theta}_s + k_s(\theta_s - \theta_i) \\ F_v = m_v\ddot{x} + b_v\dot{x} + b_e(\dot{x}-\dot{y}) + k_e(x-y) + A_s P_m \\ F_l = m_l\ddot{y} + b_l\dot{y} - b_e(\dot{x}-\dot{y}) + k_l y - k_e(x-y) - A_m P_m \\ Q_m = A_m\dot{y} + A_s(\dot{y}-\dot{x}) \\ F_v = \left(\frac{n}{r}\right)k_s(\theta_s - \theta_i) \\ \theta_i = \left(\frac{n}{r}\right)x \end{cases} \tag{I.6.67}$$

Semnificația notațiilor din sistemul de ecuații precedent este următoarea:
Q_m este debitul care acționează pe pistonul de arie A_m; x este deplasarea față de poziția neutră a pistonului distribuitorului de comandă; y este deplasarea față de poziția neutră a pistonului de arie A_m; P_m este căderea de presiune pe pistonul de arie A_m; constanta $k_1 = \frac{Q_s}{U} = 1{,}2903\frac{m^2}{s}$ este denumită sensibilitatea în debit a distribuției; Q_s este debitul sursei de alimentare; U este acoperirea negativă a distribuției; constanta $k_2 = \frac{Q_s}{2P_{s0}} = \frac{(C_0 A_v)^2}{Q_s} = 2{,}3767\cdot 10^{-10}\frac{m^5}{Ns}$; P_{s0} este presiunea sursei de alimentare, în poziția neutră a distribuitorului (sertar centrat); $C_0 = C_d\sqrt{\frac{2}{\rho}}$ este coeficientul de curgere al distribuitorului; C_d este coeficientul de debit al distribuitorului; ρ este densitatea fluidului; A_v este aria fiecărei fante inelare de curgere, când $x = 0$; coeficientul $k_3 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{2P_{s0}}{U} = \frac{Q_s^2}{U(C_0 A_v)^2} = 5{,}429\cdot 10^9\frac{N}{m^3}$ este denumit sensibilitatea în presiune a distribuției; T este cuplul aplicat volanului servodirecției; $J_s = 0{,}0791$ Nms^2/rad este momentul de inerție al axei de comandă a servodirecției; θ_s este unghiul de rotație al axei de comandă a servodirecției; θ_i este unghiul de rotație al tijei de comandă a sertarului de distribuție; b_s este coeficientul de amortizare la torsiune al axei de comandă a servodirecției; $k_s = 1807{,}8$ Nm/rad este constanta elastică de torsiune a axei de comandă a servodirecției; F_v este forța de comandă aplicată sertarului de distribuție; $m_v = 1{,}3135$ kg este masa părții mobile aferentă sertarului de distribuție; b_v este coeficientul de amortizare vâscoasă aferent sertarului de distribuție; b_e este coeficientul de amortizare vâscoasă echivalent regiunii cuprinsă între sertarul de distribuție şi sarcina pe servodirecție; k_e este constanta elastică echivalentă regiunii cuprinsă între sertarul de distribuție şi sarcina pe servodirecție; $A_s = 1{,}9355\cdot 10^{-4}$ m^2 este aria transversală a secțiunii active a sertarului de distribuție; F_l este sarcina exterioară pe servodirecție; $m_l = 105$ kg este masa sarcinii exterioare pe servodirecție; b_l este coeficientul de amortizare vâscoasă a sarcinii exterioare pe servodirecție; $k_l = 1751{,}3$ N/m este constanta elastică a sarcinii exterioare pe servodirecție; $A_m = 0{,}0019$ m^2 este aria activă de lucru a pistonului cilindrului de sarcină al servodirecției; $n = 16$ este raportul de transmisie de la axa de comandă a servodirecției la tija de comandă a sertarului distribuitorului; $r = 0{,}1524$ m este

raza de articulare a tijei de comandă a sertarului distribuitorului, față de centrul de rotație a mecanismului cremalieră – roată dințată, solidar cu axa de comandă a servodirecției.

Simulările numerice, pe modelul descris anterior, consideră aplicarea pe volanul servodirecției a unei succesiuni de două semnale treaptă a cuplului de comandă, respectiv $T = \pm 1$ Nm. În același timp, sarcina exterioară aplicată cilindrului de sarcină al servodirecției variază după legea: $F_l = 500 + 5000 \sin 5t$ N.

Se confirmă influența majoră a coeficientului de amortizare la torsiune al axei de comandă a servodirecției asupra răspunsului dinamic, o valoare optimă fiind apreciată la b_s = 0,06 Nms/rad, corespunzătoare unui regim tranzitoriu aperiodic (vezi fig. I.6.43).

Oscilațiile din semnalul poziției pistonului cilindrului de sarcină al servodirecției y se datorează părții sinusoidale a sarcinii exterioare aplicate. Partea continuă din semnalul sarcinii exterioare aplicate conduce la apariția erorii staționare (alunecare sub sarcină) de cca. 0,3 m. Coeficienții de amortizare b_e și b_v au influențe nesemnificative asupra dinamicii servodirecției, putând fi considerați nuli, într-o primă aproximare. Coeficientul de amortizare vâscoasă a sarcinii exterioare pe servodirecție, b_l, influențează alura regimului tranzitoriu și timpul de răspuns, aspectul oscilant sinusoidal nefiind inluențat de acest parametru constructiv – funcțional (vezi fig. I.6.43).

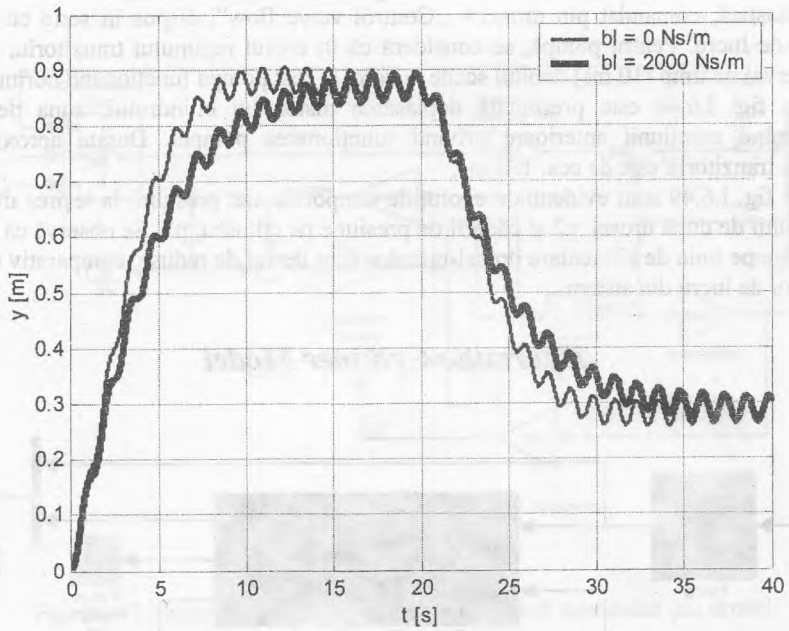


Fig. I.6.43 Regimul tranzitoriu aperiodic de răspuns al servodirecției

I.6.20 Sistem acţionare cu cilindrii hidraulici

Se consideră un sistem de acţionare, în circuit închis hidraulic – specific utilajelor mobile, format dintr-o pompă volumică – „Pump" (cu supapă de reglare a presiunii inclusă), un drosel reglabil – „Valve" (rezistenţă hidraulică variabilă) şi un cilindru cu sarcină elastică – „Cylinder/Piston/Spring" (fig. I.6.44). Ţinând cont de compresibilitatea lichidului de lucru, presupunând un regim turbulent de curgere prin drosel şi luând în calcul pierderile hidraulice, în regim laminar, pe linia de alimentare drosel-cilindru, se poate modela funcţionarea acestui sistem (răspunsul său dinamic), la aplicarea unui semnal rampă pentru aria de curgere prin drosel – „Control valve oriffice area".

În fapt, este vorba de un sistem foarte simplu de poziţionare a pistonului unui cilindru cu revenire elastică, în funcţie de reglajul supapei ataşată pompei. Rolul droselului este de amortizare a funcţionării sistemului inerto-elastic: pompă cu supapă inclusă - traseu de alimentare – cilindru cu sarcină elastică. Simulările prezentate vizează evidenţierea influenţei reglajului ariei de curgere prin drosel asupra timpului de răspuns al sistemului de acţionare studiat.

În fig. I.6.45 este prezentat modelul funcţional al pompei volumice – incluzând "scurgerile - leakage" echivalente prin supapa inclusă, în fig. I.6.46 este redată legea de reglare a ariei de curgere prin drosel, iar în fig. I.6.47 este prezentat modelul cilindrului cu sarcină elastică, comandat pin drosel – „Control valve flow", dispus în serie cu pompa şi cilindrul de lucru. Pentru pompă, se consideră că în cursul regimului tranzitoriu, pentru un scurt interval de timp (10 ms) debitul scade la zero, în rest pompa funcţionând normal.

În fig. I.6.48 este prezentată deplasarea pistonului cilindrului, zona de revenire corespunzând menţiunii anterioare privind funcţionarea pompei. Durata aproximativă a regimului tranzitoriu este de cca. 100 ms.

În fig. I.6.49 sunt evidenţiate evoluţiile temporale ale: presiunii la ieşirea din pompă, p1, presiunii de după drosel, p2 şi căderii de presiune pe cilindru, p3. Se observă că pierderile de presiune pe linia de alimentare drosel-cilindru sunt destul de reduse, comparativ cu nivelul presiunilor de lucru din sistem.

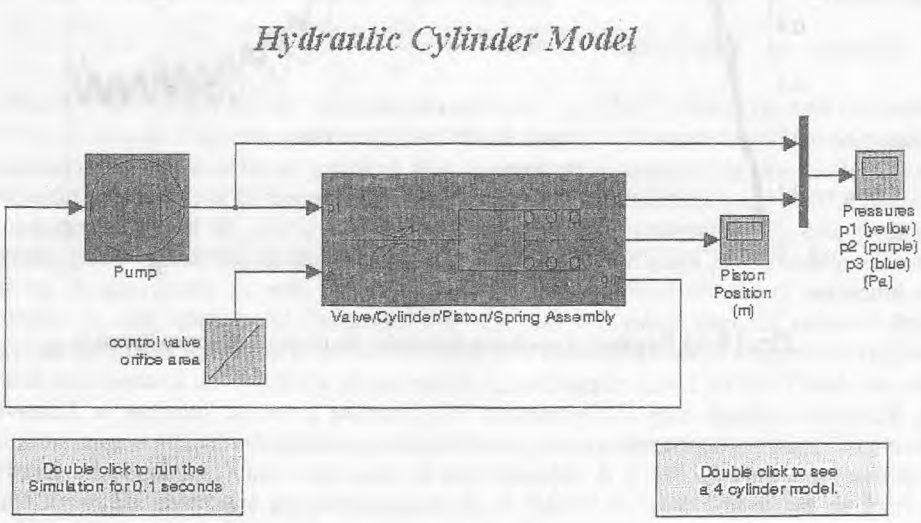


Fig. I.6.44 Sistem de acţionare, în circuit închis hidraulic

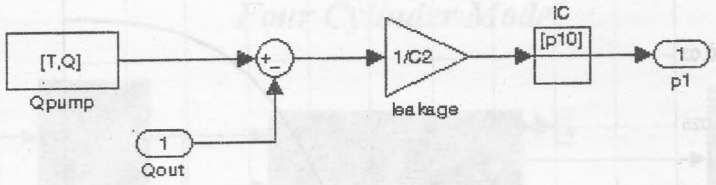


Fig. I.6.45 Modelul funcțional al pompei volumice

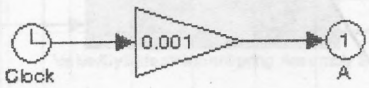


Fig. I.6.46 Legea de reglare a ariei de curgere prin drosel

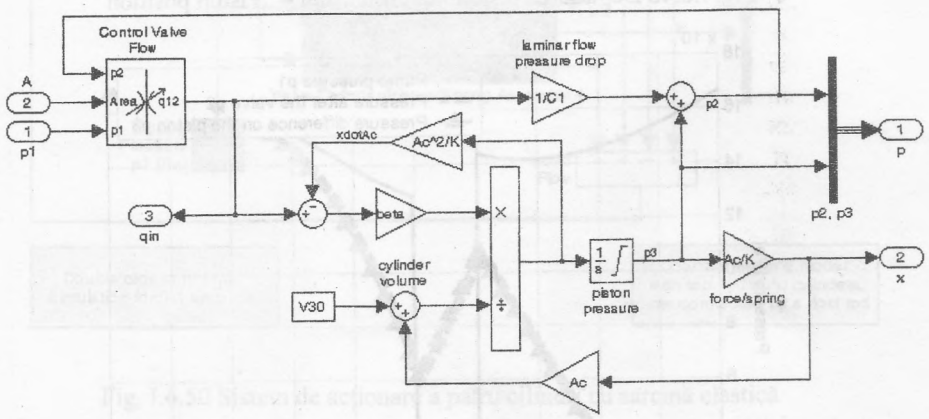


Fig. I.6.47 Modelul cilindrului cu sarcină elastică, comandat pin drosel

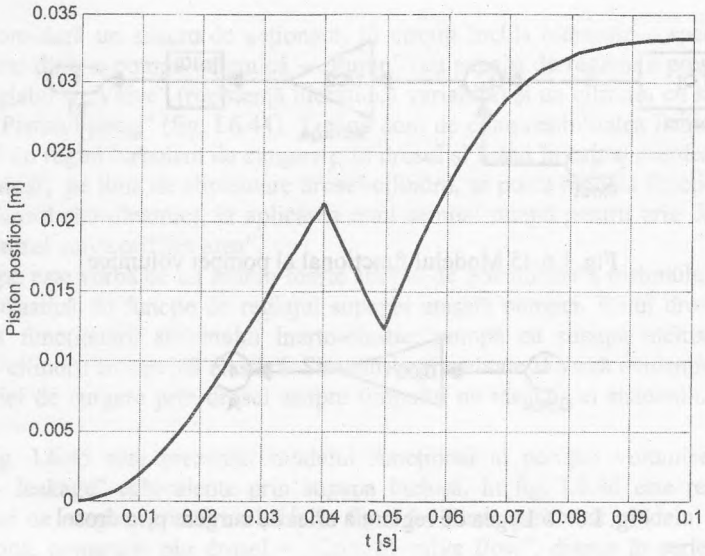


Fig. I.6.48 Deplasarea pistonului cilindrului – „Piston position"

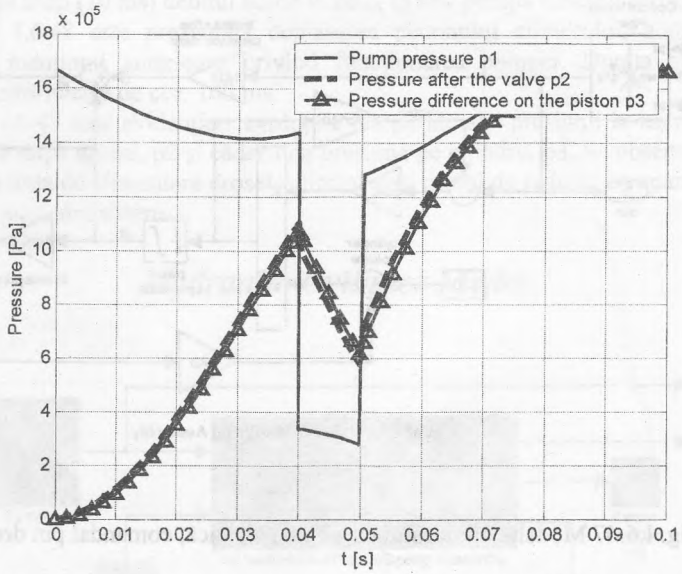


Fig. I.6.49 Evoluțiile temporale ale: presiunii – „Pressure" la ieşirea din pompă, p1, presiunii de după drosel, p2 şi căderii de presiune pe cilindru, p3

În fig. I.6.50, se consideră un sistem de acționare similar cu cel prezentat în fig. I.6.44, format dintr-o pompă volumică (cu supapă de reglare a presiunii inclusă), un drosel reglabil (rezistență hidraulică variabilă) şi patru cilindri cu sarcină elastică.

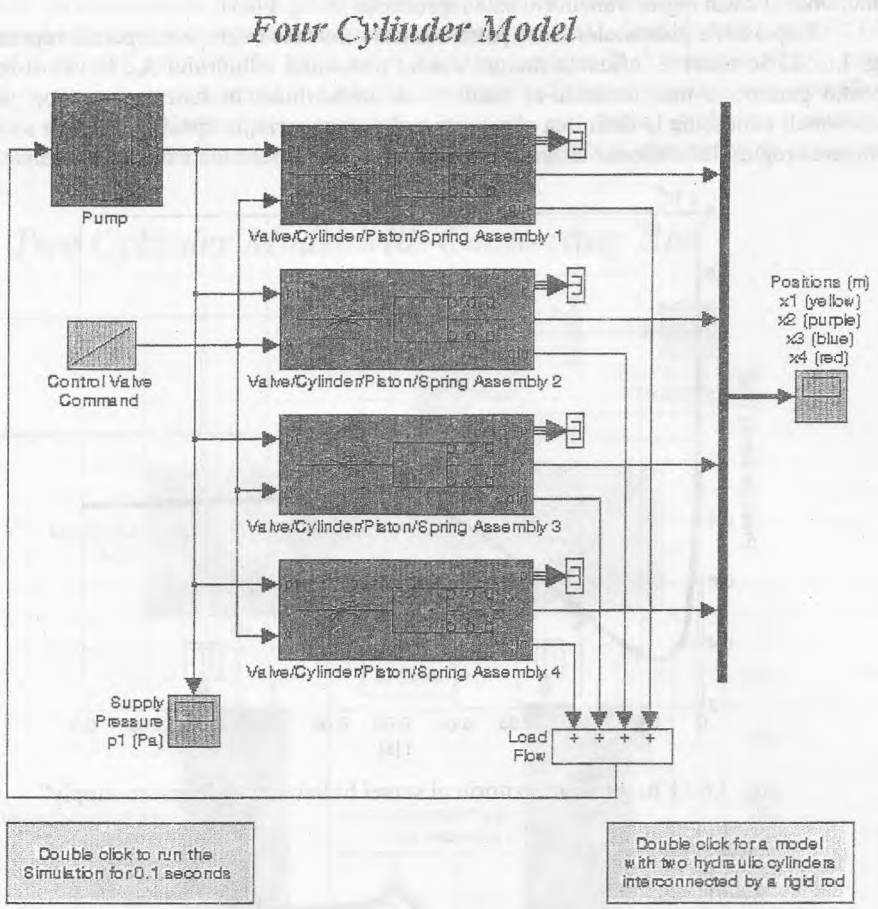


Fig. I.6.50 Sistem de acționare a patru cilindri cu sarcină elastică

Se urmărește compararea regimurilor tranzitorii, pe baza diferitelor valori a trei parametri constructiv-funcționali reprezentativi, conform celor precizate în continuare (vezi tabelul I.6.1):

Tabelul I.6.1

	Cilindru 1	Cilindru 2	Cilindru 3	Cilindru 4
Constanta elastică, K	K	K/4	4K	K
Aria pistonului cilindrului, A_c	A_c	$A_c/4$	$4A_c$	A_c
Modulul de elasticitate al lichidului, beta	beta	beta	beta	beta/1000

Pentru pompa volumică, cu supapă de reglare inclusă, se consideră un model funcțional al cărui regim tranzitoriu este reprezentat în fig. I.6.51.

Deplasările pistoanelor celor patru cilindri urmăresc evoluția temporală reprezentată în fig. I.6.52. Se observă influența majoră a ariei pistonului cilindrului A_c, la valori reduse ale acestui parametru manifestându-se tendințe de instabilitate în funcționare. Toți parametrii funcționali contribuie la definirea alurii regimului tranzitoriu, în special pe prima sa jumătate, atingerea regimului staționar făcându-se aproape identic pentru toate cazurile studiate.

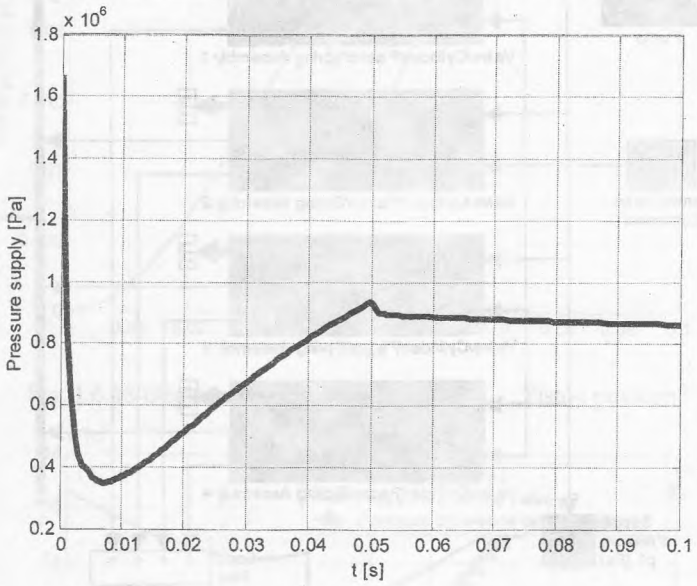


Fig. I.6.51 Regimul tranzitoriu al sursei hidraulice – „Pressure supply"

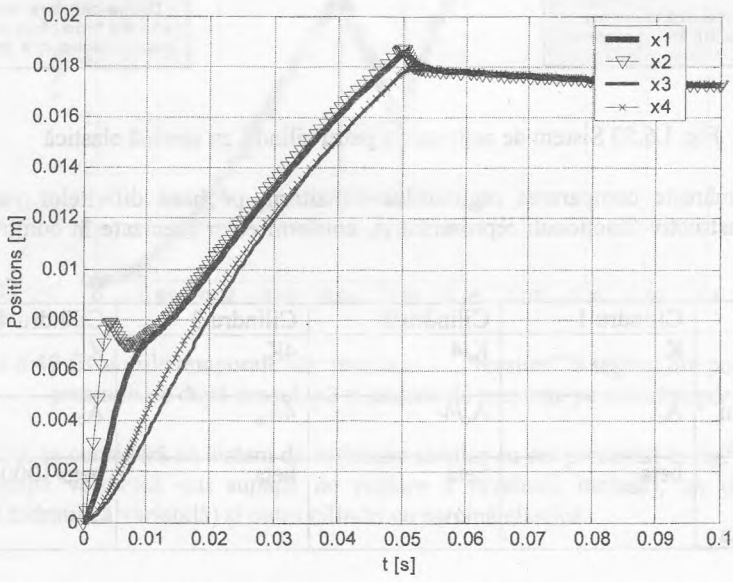


Fig. I.6.52 Evoluția temporală a deplasării pistoanelor celor patru cilindri – „Positions"

În fig. I.6.53, se consideră un sistem de acționare similar cu cel prezentat în fig. I.6.44, format dintr-o pompă volumică (cu supapă de reglare a presiunii inclusă), două drosele reglabile (A și B) și doi cilindri având tijele pistoanelor cuplate mecanic la o pârghie rigidă, care acționează o sarcină gravitațională – „Mechanical load". Schema studiată este specifică instalațiilor aferente platformelor seismice, la care se pune problema studierii comportamentului mecanic la mișcări oscilante, induse cu ajutorul sistemelor de acționare hidraulice.

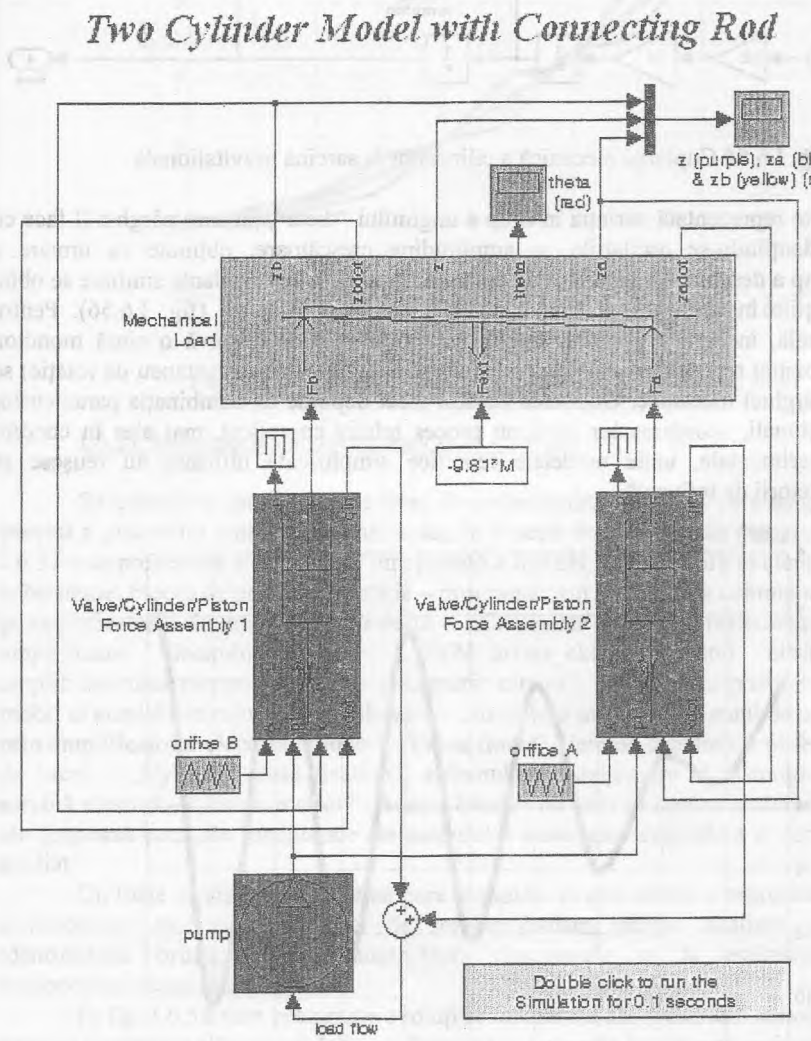


Fig. I.6.53 Sistem de acționare cu doi cilindri având tijele pistoanelor cuplate mecanic

Cuplarea mecanică a cilindrilor la sarcina gravitațională se face conform modelului prezentat în fig. I.6.54.

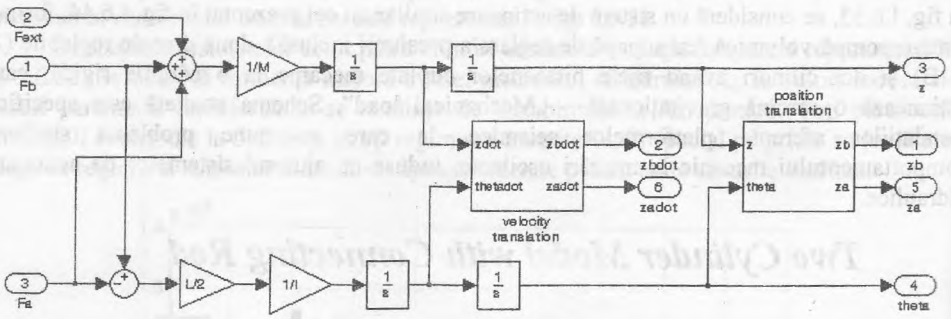


Fig. I.6.54 Cuplarea mecanică a cilindrilor la sarcina gravitațională

În fig. I.6.55 este reprezentată variația în timp a unghiului "theta", pe care pârghia îl face cu orizontala, evidențiindu-se oscilațiile cu amplitudine crescătoare, obținute ca urmare a variațiilor în timp a deschiderii orificiilor de comandă A şi B. Aluri oscilante similare se obțin şi pentru variațiile în timp ale poziției capetelor pârghiei, za şi zb (fig. I.6.56). Pentru articulația centrală, în care acționează sarcina gravitațională, se observă o alură monoton crescătoare a poziției respective, z; în raport cu acest punct (centru instantaneu de rotație) se face oscilația pârghiei mecanice. Obținerea acestui efect depinde de combinația parametrilor contructiv-funcționali, acordarea lor fiind un proces relativ complicat, mai ales în condiții practice – experimentale, unde modelele teoretice simplificate utilizate nu reuşesc să surprindă toți factorii de influență.

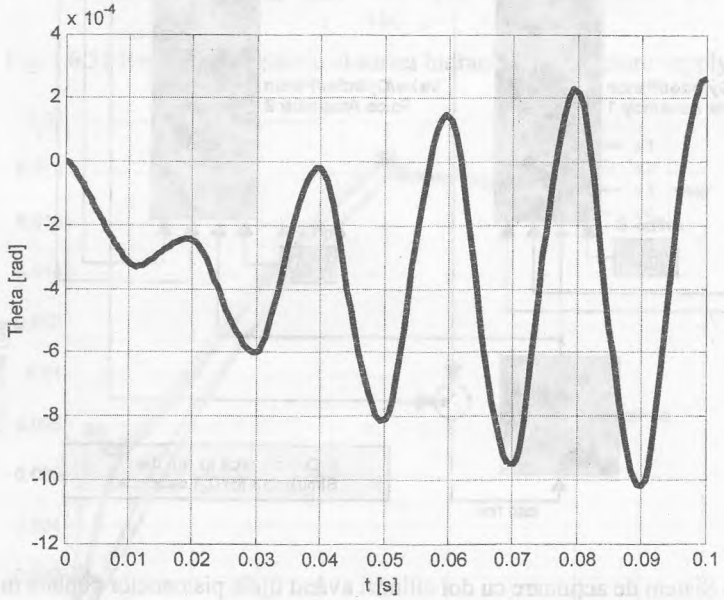


Fig. I.6.55 Variația în timp a unghiului "Theta"

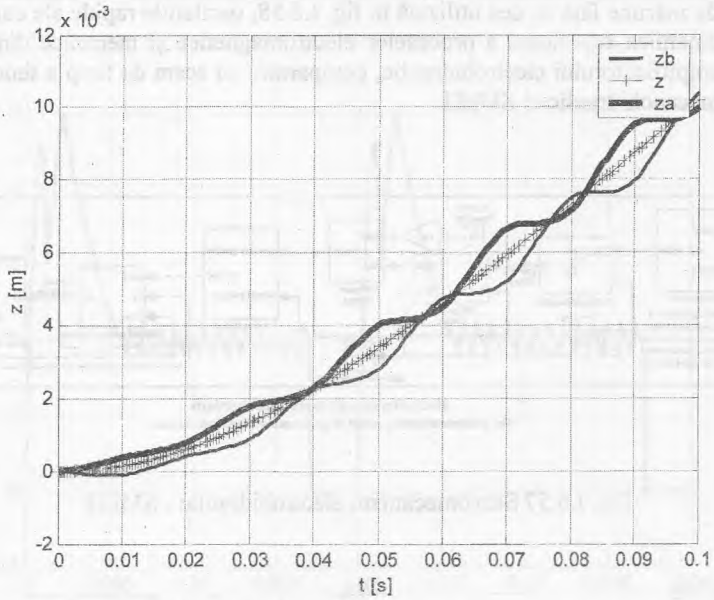


Fig. I.6.56 Variațiile în timp ale poziției capetelor pârghiei

I.6.21 Servomecanism electrohidraulic - SMEH

Se consideră un servomecanism electrohidraulic - SMEH, care asigură poziționarea precisă a pistonului unui cilindru hidraulic, în funcție de semnalul de comandă aplicat. În fig. I.6.57 este prezentată schema bloc funcțională a SMEH, schemă care evidențiază principalele subsisteme: blocul de prescriere poziție – programatorul – „Position command", comparatorul și amplificatorul de eroare – controlerul – „Controller", convertorul curent-tensiune bobină amplificator electrohidraulic – „PWM_driver_ckt", circuitul electromagnetic al amplificatorului electrohidraulic – „Magnetic circuit", sistemul de poziționare al sertarului mobil al amplificatorului electrohidraulic – „Armature motion", sistemul de control al curgerii prin amplificatorul electrohidraulic – „Valve flows", linia de comandă a pistonului cilindrului de lucru – „Cylinder pressurization", sistemul de poziționare al pistonului cilindrului cu sarcină elastică – „Piston motion". Aceste blocuri nu sunt în fapt subsisteme constructive, ci ele grupează ecuațiile funcționale ale modelului matematic echivalent al servomecanismului studiat.

Cu toate că sistemul prezentat pare complex, el este numai o reprezentare simplificată a modelului real al unui astfel de servomecanism, scopul analizei rezumându-se la identificarea principalelor subansambluri funcționale și la evaluarea calitativă a comportamentului său dinamic.

În fig. I.6.58 sunt prezentate evoluțiile temporale ale prescrierii servomecanismului și poziției pistonului cilindrului de lucru. Principalele aspecte funcționale evidențiate se referă la defazajul dintre programul prescris și poziția pistonului SMEH și la "zgomotul" care afectează semnalul de poziție realizat. Modificarea/optimizarea acestor aspecte funcționale depinde de modul de acordare al amplificatorului de eroare – controlerului, conform teoriei sistemelor automate. În corelație cu aceste considerații, un parametru important în procesul de reglare este curentul de comandă al bobinei amplificatorului electrohidraulic, evoluția sa temporală fiind prezentată în fig. I.6.59. Scara de timp diferă cu

două ordine de mărime față de cea utilizată în fig. I.6.58, oscilațiile rapide ale curentului fiind asociate cu dinamica superioară a proceselor electromagnetice şi mecanice din circuitul de comandă al amplificatorului electrohidraulic, comparativ cu scara de timp a fenomenelor din subsistemul mecanohidraulic al SMEH.

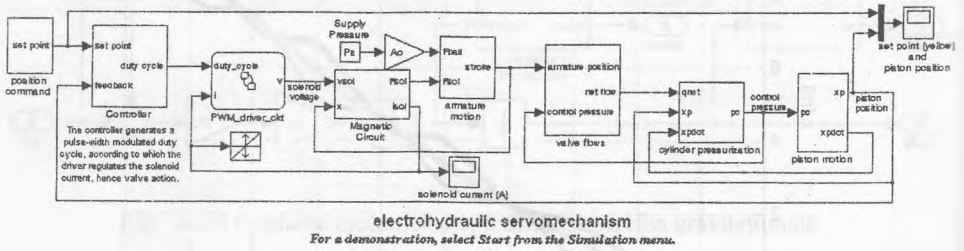


Fig. I.6.57 Servomecanism electrohidraulic - SMEH

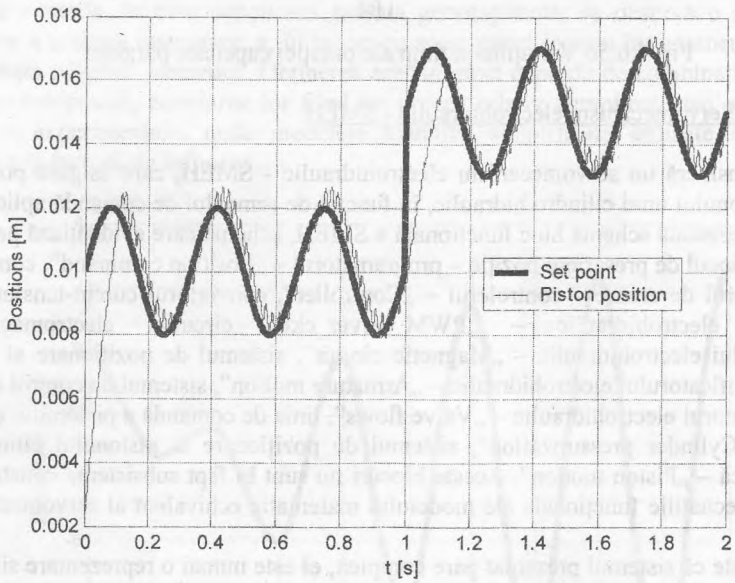


Fig. I.6.58 Evoluțiile temporale ale prescrierii servomecanismului – „Set point"şi poziției pistonului cilindrului de lucru – „Piston position"

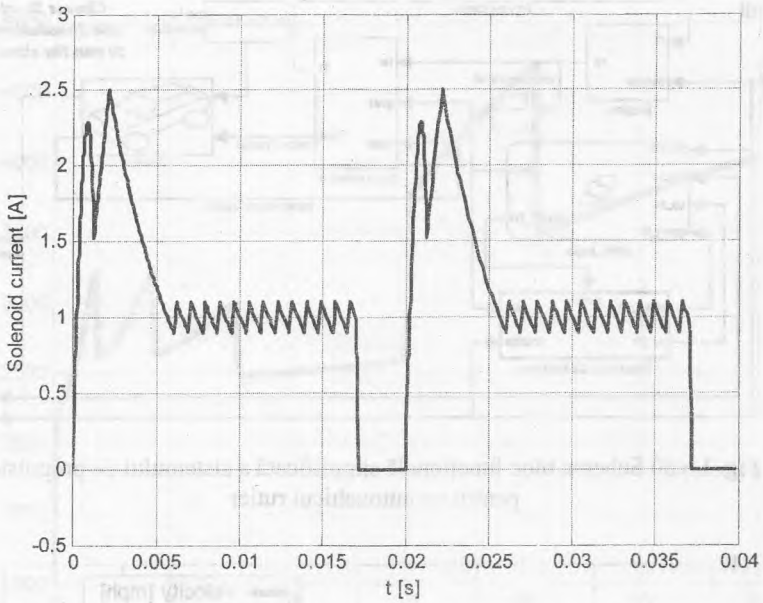


Fig. I.6.59 Evoluția temporală a curentului de comandă – „Solenoid current" al bobinei amplificatorului electrohidraulic

I.6.22 Autovehicul

În fig. I.6.60 este reprezentată schema bloc funcțională simplificată a sistemului de propulsie pentru un autovehicul rutier. Cele trei mari subsisteme (motor – „Engine", transmisie automată – „Transmission" și grup organe de propulsie/frânare – drum – „Vehicle") sunt modelate separat, legăturile/reglajele funcționale dintre acestea fiind grupate, la rândul lor, în două blocuri separate: „Shift_logic" și "Threshold calculation". Programele de prescriere poziție pedale de accelerație/frână sunt identificate separat în fig. I.6.60: „Throttle schedule" / „Brake schedule".

În fig. I.6.61 sunt prezentate evoluția temporală a vitezei de deplasare a autovehiculului și programul de prescriere a poziției pedalei de accelerație. Se observă că la jumătatea intervalului de timp se produce un salt al poziției pedalei de accelerație, care corespunde unui punct unghiular pe curba de creștere a vitezei de deplasare a autovehiculului. Asociat acestui comportament dinamic, în fig. I.6.62 este reprezentată variația în timp a turației motorului, curbă pe care se pot localiza două puncte de salt maxim și o variație oscilantă a turației motorului, la demarajul autovehiculului. În afara acestor zone, variația turației motorului este aproximativ liniară. Optimizarea exploatării celor trei mari subsisteme este strâns legată de alura și domeniile de variație de pe curbele prezentate, cele menționate mai sus fiind un bun exemplu în acest sens.

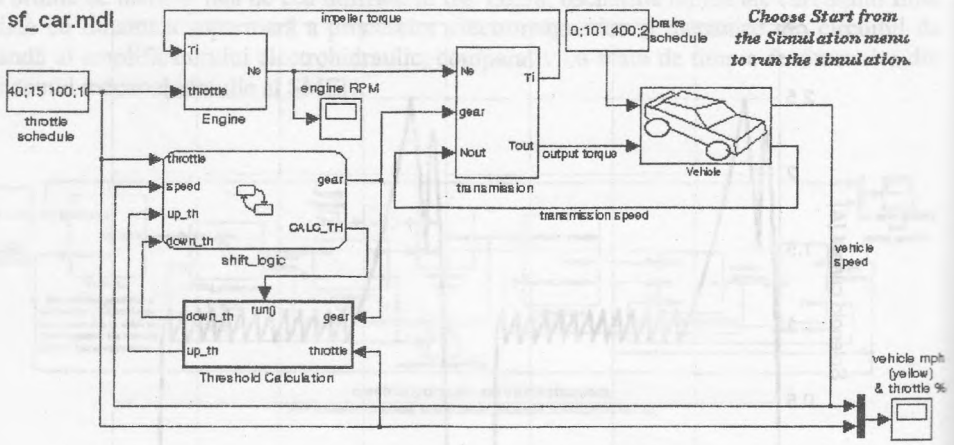


Fig. I.6.60 Schema bloc funcţională simplificată a sistemului de propulsie pentru un autovehicul rutier

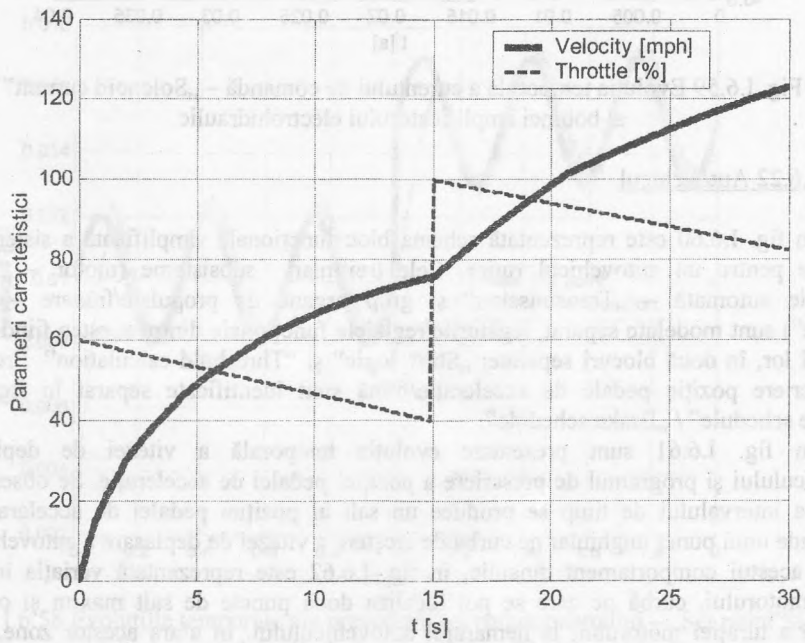


Fig. I.6.61 Evoluţia temporală a vitezei de deplasare a autovehiculului şi programul de prescriere a poziţiei pedalei de acceleraţie

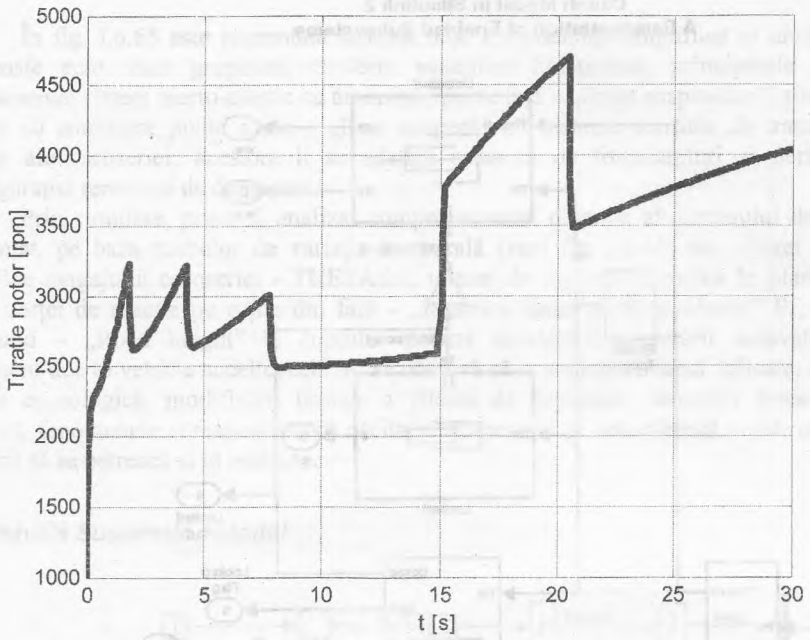


Fig. I.6.62 Variația în timp a turației motorului

I.6.23 Ambreiaj auto

În fig. I.6.63 este prezentată schema bloc funcțională a unui model simplificat de ambreiaj auto. Prin intermediul blocurilor care modelează fenomenul de frecare specific funcționării ambreiajului – „Friction model" și „Friction mode logic", asociate celor două cazuri reprezentative: ambreiaj cuplat – "Clutch locked", respectiv decuplat (cu alunecare) – „Clutch unlocked", se permite simularea parametrilor de lucru reprezentativi și analiza cantitativă a evoluțiilor lor temporale. În acest sens, în fig. I.6.64, corelat cu poziția pedalei de ambreiaj – „Clutch pedal" și cuplul transmis de la motorul termic – „Engine torque", ca mărimi de intrare – sunt reprezentate evoluțiile în timp ale turațiilor intrare/ieșire din ambreiajul decuplat, respectiv mișcării de rotație transmise cu ambreiajul cuplat – ca mărimi de ieșire. Alura curbelor prezentate este tipică pentru astfel de sisteme de cuplare mecanică prin fricțiune, fiind de remarcat primele și ultimele patru secunde din regimul tranzitoriu studiat, intervale în care, în funcție de starea pedalei de ambreiaj se face "acomodarea" turațiilor amonte-aval de ambreiaj la cuplarea acestuia, respectiv transmiterea mișcării de la motor, prin cutia de viteze, la transmisia principală, la decuplarea ambreiajului.

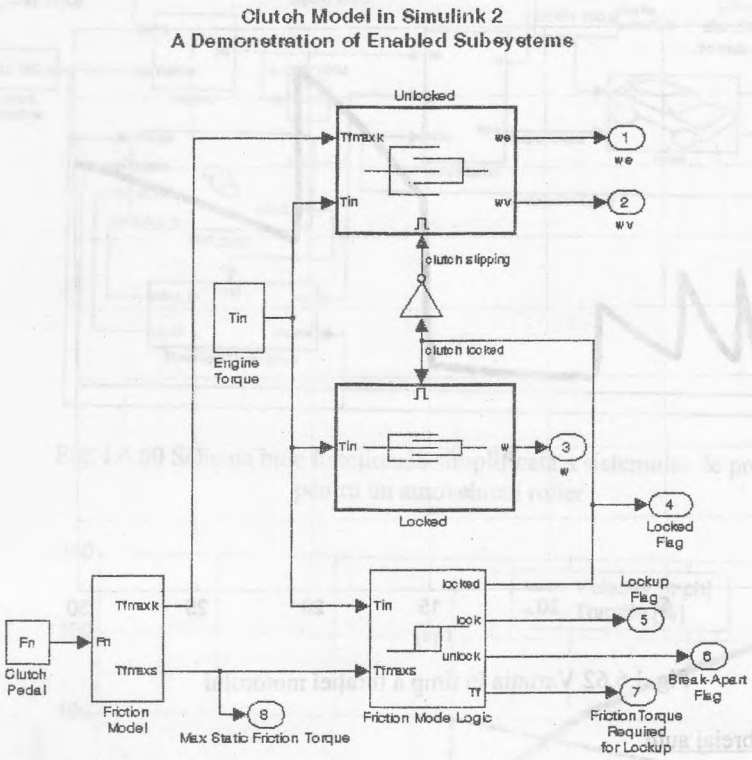


Fig. I.6.63 Schema bloc funcțională a unui model simplificat de ambreiaj auto

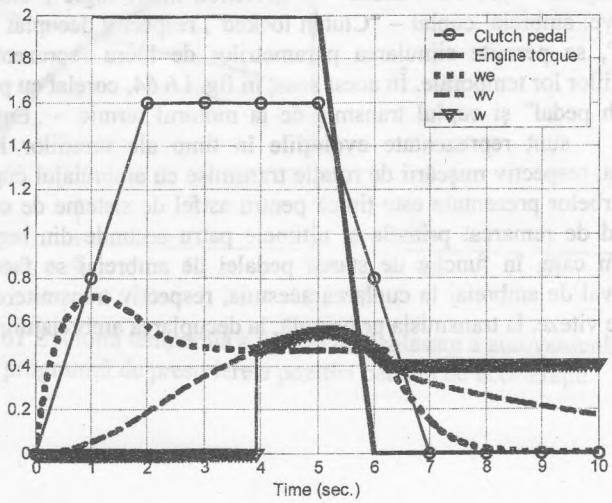


Fig. I.6.64 Evoluțiile în timp ale turațiilor intrare/ieşire: we/wv, din ambreiajul decuplat, respectiv mişcării de rotaţie transmise w, cu ambreiajul cuplat

I.6.24 Suspensie auto

În fig. I.6.65 este prezentată schema bloc a modelului simplificat al unui sistem de suspensie auto, care grupează, conform ecuațiilor funcționale, principalele subsisteme componente: sistem inerto-elastic cu amortizor punte față – „Front suspension", sistem inerto-elastic cu amortizor punte spate – „Rear suspension", sisteme inerțiale de translație și de rotație ale caroseriei; acestora li se adaugă sistemul de forțe/cupluri și perturbații ale configurației terenului de deplasare.

Prin simulare, poate fi analizat comportamentul dinamic al sistemului de suspensie prezentat, pe baza curbelor de variație temporală (vezi fig. I.6.66) ale vitezei unghiulare specifice tangajului caroseriei - THETAdot, vitezei de oscilație a roților în plan vertical – Zdot, forței de reacție pe roțile din față – „Reaction force at front wheels" Ff, denivelării drumului – „Road height" h, cuplului datorat accelerării/decelerării autovehiculului – „Moment due to vehicle accel/decel" Y. Se observă că la semnale treaptă aplicate, asociate, în ordine cronologică, modificării brutale a vitezei de deplasare, respectiv trecerii peste o bordură, fenomenele corespunzătoare oscilației suspensiei se amortizează rapid, ceea ce este de dorit să se petreacă și în realitate.

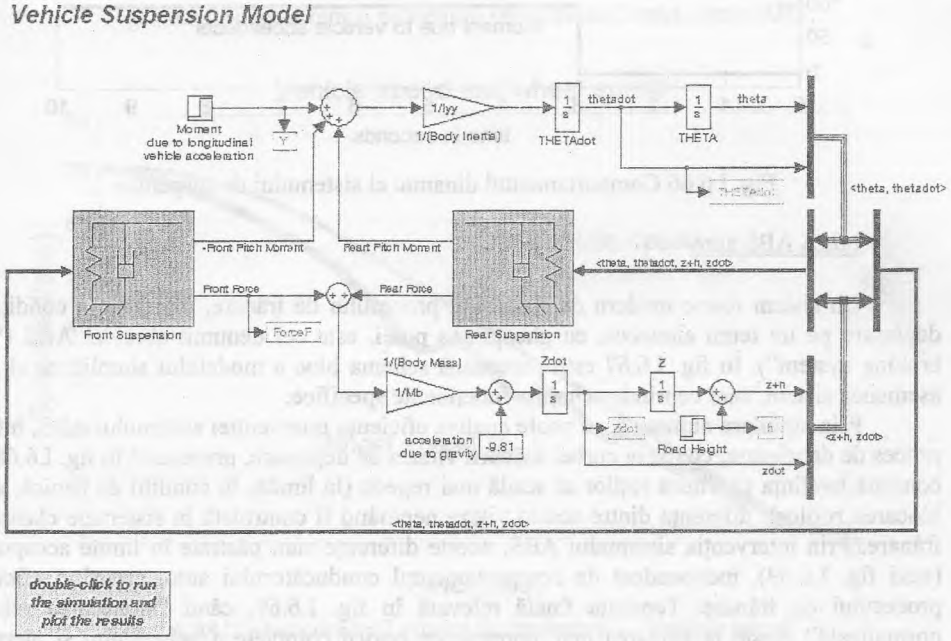


Fig. I.6.65 Schema bloc a modelului simplificat al unui sistem de suspensie auto

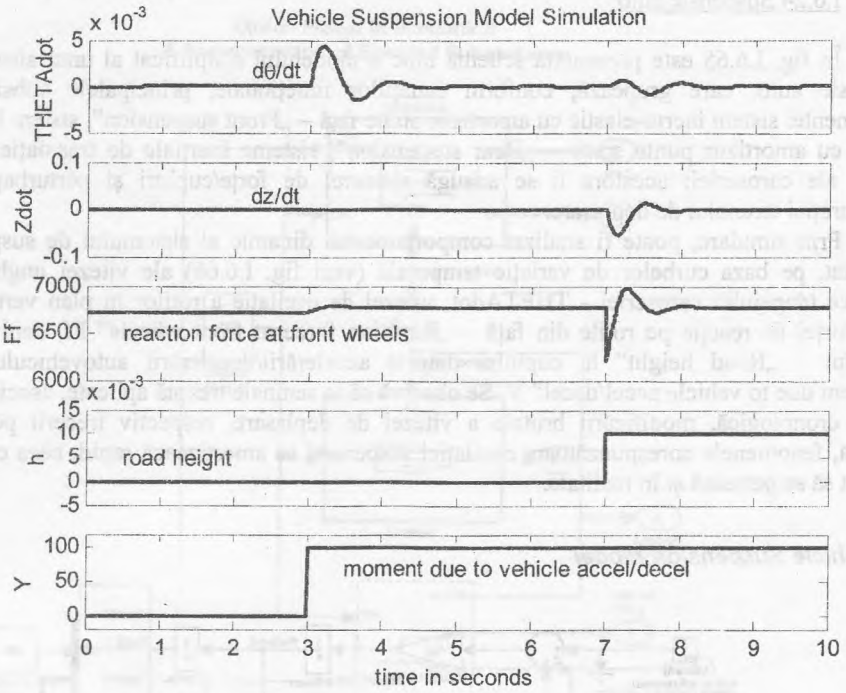


Fig. I.6.66 Comportamentul dinamic al sistemului de suspensie

I.6.25 ABS auto

Un sistem foarte modern de control al procesului de frânare, mai ales în condiţii de deplasare pe un teren alunecos, cu gheaţă sau polei, este cel denumit abreviat ABS ("anti braking system"). În fig. I.6.67 este prezentată schema bloc a modelului simplificat al unui asemenea sistem, care cuprinde ecuaţiile funcţionale specifice.

Prin simulare numerică, se poate analiza eficienţa intervenţiei sistemului ABS, într-un proces de decelerare, conform curbei scăderii vitezei de deplasare, prezentată în fig. I.6.68. Se constată tendinţa ca viteza roţilor să scadă mai repede (la limită, în condiţii de panică, chiar blocarea roţilor), diferenţa dintre aceste viteze neputând fi controlată în sistemele clasice de frânare. Prin intervenţia sistemului ABS, aceste diferenţe sunt păstrate în limite acceptabile (vezi fig. I.6.69), independent de comportamentul conducătorului auto, crescând eficienţa procesului de frânare. Tendinţa finală relevată în fig. I.6.69, când "alunecarea relativă normalizată" creşte la valoarea unu, corespunde opririi complete a vehiculului şi mersului normal al motorului acestuia.

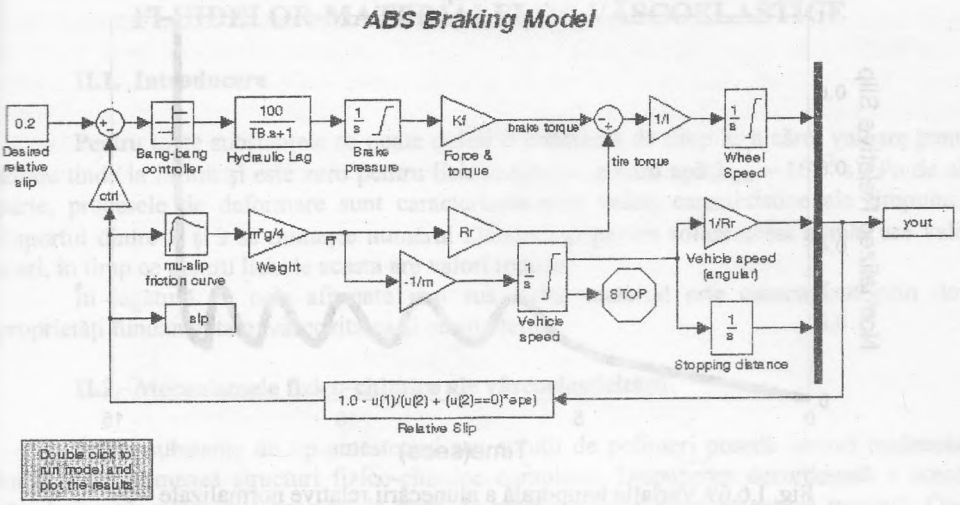


Fig. I.6.67 Schema bloc a modelului simplificat al unui sistem ABS

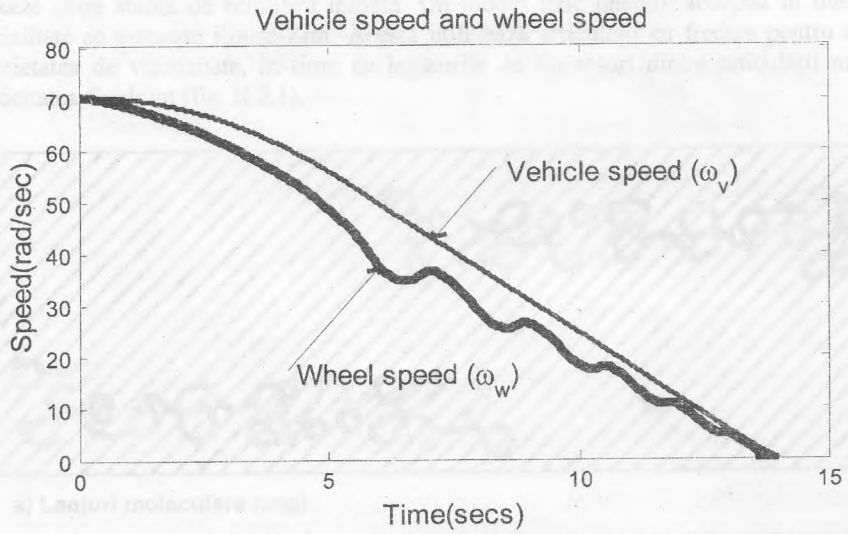


Fig. I.6.68 Curbele scăderii vitezei de deplasare – "Vehicle speed", respectiv roții – „Wheel speed"

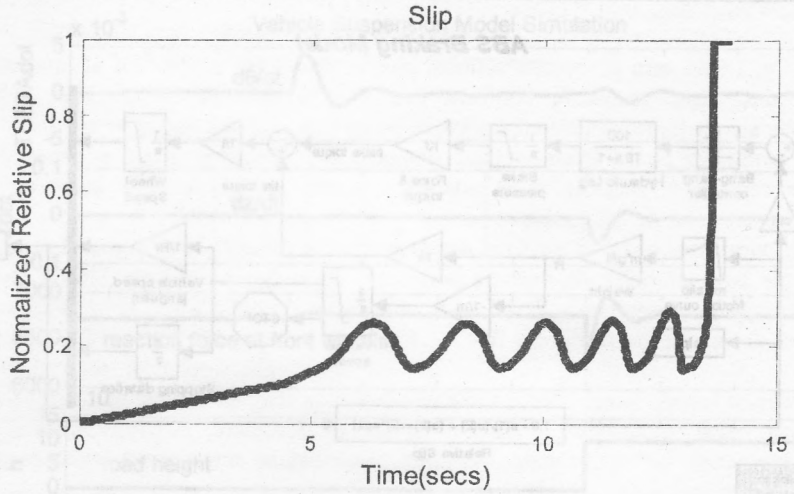


Fig. I.6.69 Variația temporală a alunecării relative normalizate – "Normalized relative slip"

II. DETERMINAREA PROPRIETĂȚILOR FLUIDELOR-MATERIALELOR VÂSCOELASTICE

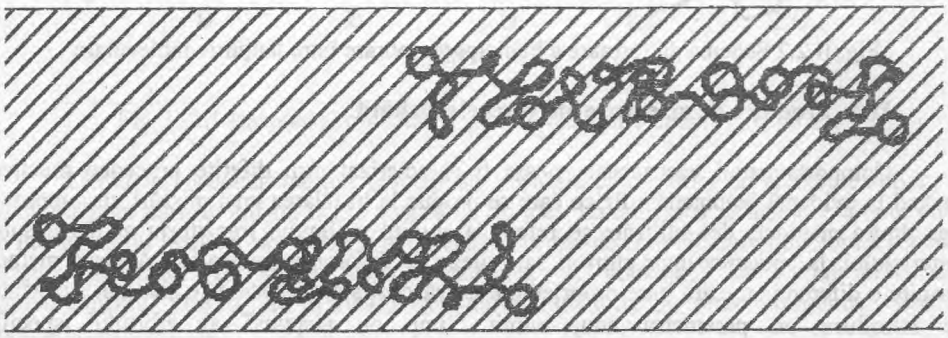
II.1. Introducere

Pentru toate substanțele se poate defini o constantă de timp λ, a cărei valoare pentru solide tinde la infinit și este zero pentru lichide (de ex. pentru apă $\lambda_{apă} = 10^{-12}$ s). Pe de altă parte, procesele de deformare sunt caracterizate prin valori caracteristice ale timpului *t*. Raportul dintre λ și *t* se numește numărul Deborah și pentru solide acest număr are valori mari, în timp ce pentru lichide acesta are valori reduse.

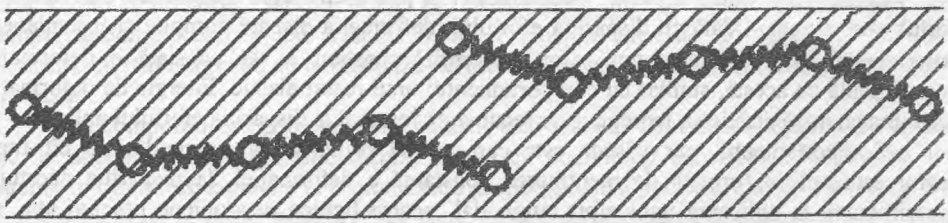
În legătură cu cele afirmate mai sus, orice material este caracterizat prin două proprietăți fundamentale: vâscozitatea și elasticitatea.

II.2. Mecanismele fizico-chimice ale vâscoelasticității

Multe substanțe de tip amestecuri sau soluții de polimeri posedă lanțuri moleculare lungi, care formează structuri fizico-chimice complexe. Dispunerea dezordonată a acestor structuri moleculare este asociată în stare de repaus cu o energie potențială minimă. Orice deformație conduce la alungiri ale lanțurilor moleculare și la orientarea lor în direcția forțelor aplicate. Energia potențială crește, iar la dispariția efortului aplicat moleculele tind să se relaxeze către starea de echilibru inițială. Un model fizic unanim acceptat în literatura de specialitate se numește Rouse-Zim. Acesta utilizează articulații cu frecare pentru a modela proprietatea de viscozitate, în timp ce legăturile de tip resort dintre articulații modelează elasticitatea fluidului (fig. II.2.1).



a) Lanțuri moleculare lungi



b) Modelare prin resorturi elastice și articulații

Fig. II.2.1 Modelul Rouse-Zim pentru fluide vâscoelastice

În fig. II.2.2 sunt prezentate buclele temporare ce se formează între milioanele de lanţuri moleculare ce există în substanţele analizate mai sus. Când este supus unui efort aplicat instantaneu fluidul va reacţiona iniţial printr-un comportament elastic rigid. După un anumit timp structura elastică va începe să se deformeze, desfacă şi orienteze în direcţia efortului aplicat, urmată de apariţia curgerii. La viteze mici de deformare predomină un comportament vâscos, în timp ce la viteze mari de deformare se manifestă preponderent acumularea de energie potenţială elastică. În faza de relaxare o parte din energia acumulată elastic este cedată şi se atinge o nouă stare de echilibru.

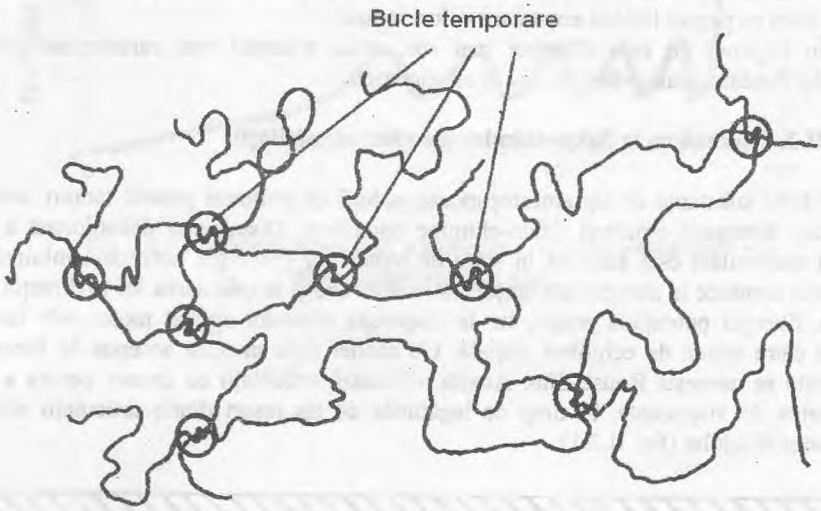


Fig. II.2.2 Schema de formare a buclelor temporare între lanţurile moleculare

II.3. Procedee de măsurare ale vâscoelasticităţii

Comportamentul vâscoelastic poate fi caracterizat prin diferite procedee practice, punând în evidenţă fenomenele fizice care se produc la instalarea unei mişcări viscometrice. Una dintre metodele des utilizate se referă la studiul regimului tranzitoriu al răspunsului materialului, la aplicarea unor eforturi sau viteze de deformare controlate. Această metodă permite o diferenţiere clară între proprietăţile de vâscozitate şi elasticitate ale unei substanţe. Se introduce un parametru nou, numit "timp de răspuns" al efortului specific comportamentului vâscos sau elastic.

Comportamentul pur elastic este caracterizat prin menţinerea deformaţiei atât timp cât efortul este aplicat. Odată cu dispariţia efortului, deformaţia dispare complet şi instantaneu. Experimental, prin aplicarea unui efort tangenţial constant τ_0, se constată o deformaţie proporţională cu acesta, similar cu comportamentul unui resort elastic. Energia de deformaţie este înmagazinată elastic şi, teoretic, este recuperată integral la dispariţia efortului aplicat.

Comportamentul pur vâscos este caracterizat printr-o deformaţie liniară cît timp efortul este aplicat, urmată de menţinerea constantă a deformaţiei, la dispariţia acestuia. Experimental, la aplicarea unui efort tangenţial, pentru lichide newtoniene precum apa, se constată o viteză de deformaţie proporţională cu acesta, coeficientul de proporţionalitate fiind dat de vâscozitatea dinamică a lichidului considerat. Energia de deformaţie se transformă integral în căldură şi nu poate fi recuperată la dispariţia efortului aplicat.

În lipsa eforturilor normale, comportamentul reologic al solidului Hooke (pur elastic) şi al fluidului newtonian (pur vâscos) este un comportament reologic limită.

Comportamentul viscoelastic este caracterizat printr-un răspuns tranzitoriu specific al deformaţiei, la aplicarea unui semnal treaptă de efort (fig. II.3.1). Se pot evidenţia două regiuni distincte ale curbei şi anume o creştere neliniară şi o scădere asimptotică a deformaţiei pe durata aplicării efortului, respectiv după încetarea sa. Revenirea nu se face la situaţia iniţială, deci există o deformaţie remanentă de tip vâscos.

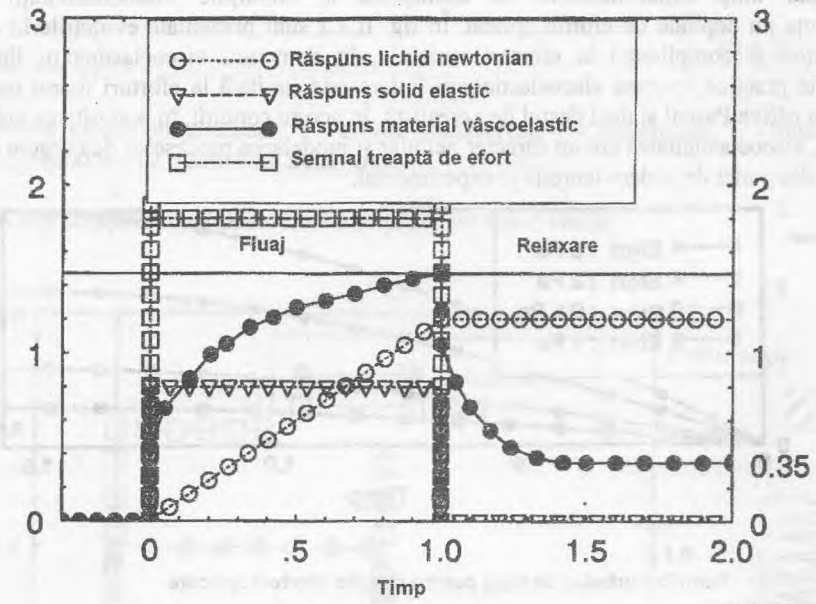


Fig. II.3.1 Răspunsul tranzitoriu, pentru mai multe tipuri de materiale

Lichidele vâscoelastice pot fi modelate reologic ca dispersii de molecule solide, cu comportament elastic, într-un lichid vâscos de tip ulei. La aplicarea instantanee a unui efort, se manifestă un răspuns rapid de tip solid-elastic, urmat de o modificare structurală asociată curgerii vâscoase. În sensul celor prezentate, se consideră că iniţial predomină comportamentul elastic, iar în finalul regimului tranzitoriu se tinde asimptotic către un comportament vâscos.

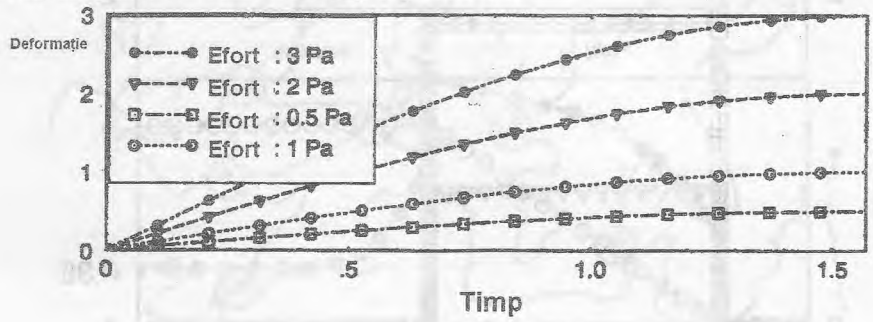
În timpul testului de fluaj, pentru fluidele vâscoelastice se poate evidenţia existenţa unui regim tranzitoriu, iar în zona sa intermediară nu se poate decela ferm între comportamentul elastic şi cel vâscos. În acest sens, în faza de relaxare (fig. II.3.1), la dispariţia efortului aplicat, se evidenţiază deformaţia remanentă de tip vâscos şi revenirea de tip elastic.

Un comportament particular vâscoelastic este acela al viscoelasticităţii liniare. În acest caz se operează cu ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi. Modificarea unui parametru de intrare conduce la o modificare proporţională a parametrului de ieşire. Un fluid viscoelastic liniar se poate modela printr-o combinaţie de elemente pur elastice şi pur viscoase liniare. Modelele analogice viscoelastice sunt caracterizate printr-o dependenţă liniară, în regim staţionar între efortul tangenţial şi deformaţie, respectiv între efortul tangenţial şi viteza de deformare.

În testele de fluaj se impune un efort şi se măsoară evoluţia în timp a deformaţiei. Pe baza acestei dependenţe se poate introduce un parametru suplimentar, numit complianţă. El este asemănător cu viscozitatea din regim staţionar şi este definit prin următoarea ecuaţie:

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau} \qquad \text{(II.3.1)}$$

Cât timp experimentările se desfăşoară în condiţiile viscoelasticităţii liniare, complianţa nu depinde de efortul aplicat. În fig. II.3.2 sunt prezentate evoluţiile în timp ale deformaţiei şi complianţei la eforturi variabile, în domeniul viscoelasticităţii liniare. În aplicaţiile practice, ipoteza viscoelasticităţii liniare este limitată la eforturi foarte reduse, de ordinul a câţiva Pascal şi deci destul de nerealistă. În aceste condiţii, în majoritatea aplicaţiilor practice, viscoelasticitatea are un caracter neliniar şi modelarea proceselor de curgere este mai dificilă, din punct de vedere teoretic şi experimental.



Familia curbelor de fluaj pentru diferite eforturi aplicate

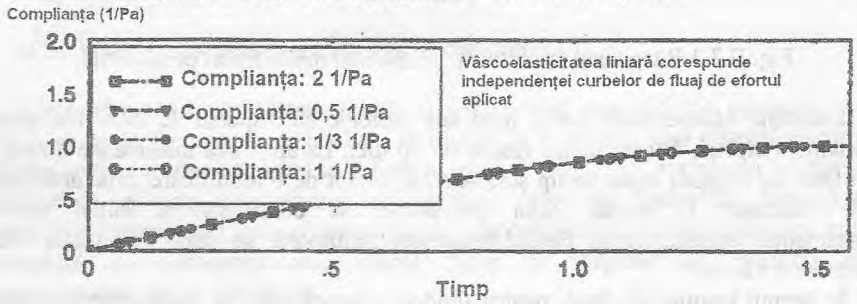


Fig. II.3.2 Evoluţiile temporale ale deformaţiei şi complianţei, pentru diferite eforturi aplicate, în domeniul vâscoelasticităţii liniare

II.3.1. Aspecte teoretice ale testelor de fluaj şi relaxare

Pentru înţelegerea comportării viscoelastice se apelează la modele foarte simple ale substanţei (combinaţii de resoarte şi amortizoare viscoase), fără a avea un corespondent direct în structura fizică-moleculară a materialului.

Vor fi analizate modelele matematice pentru elementele tip şi pentru câteva combinaţii reprezentative.

a) Solidul ideal (fig. II.3.3)

Un solid ideal răspunde instantaneu printr-o deformație proporțională cu efortul aplicat, în domeniul elastic. La dispariția efortului deformația dispare și corpul revine la forma inițială. Prin intermediul modulelor longitudinal (Young) și transversal, se pot scrie următoarele ecuații constitutive ce descriu comportarea materialului:

$$\sigma = E\gamma$$
$$\tau = G\gamma \qquad \text{(II.3.2)}$$

unde: σ este efortul longitudinal; τ - efortul transversal; γ - deformația; E - modulul lui Young; G - modulul de elasticitate transversal.

Acest comportament poate fi descris printr-un resort elastic.

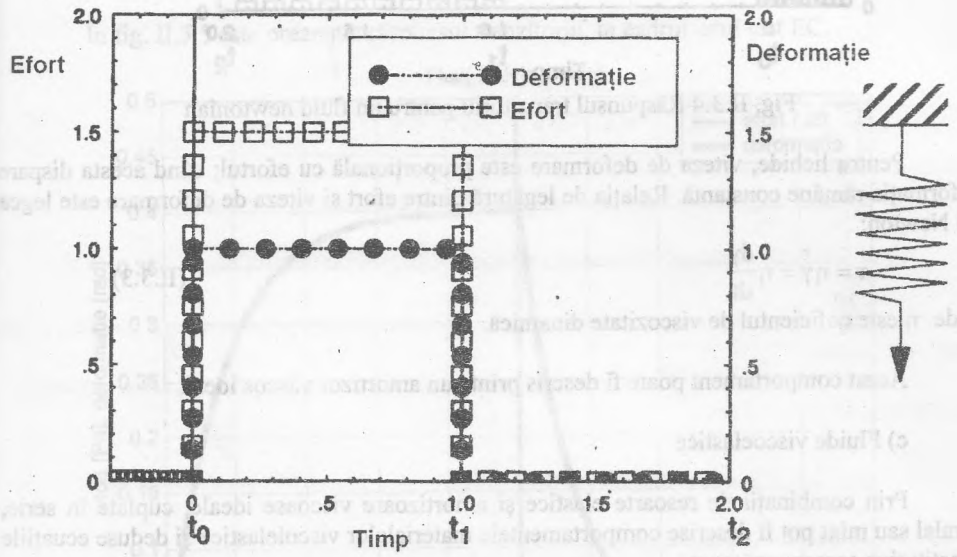


Fig. II.3.3 Răspunsul tranzitoriu pentru un solid ideal elastic

b) Lichidul newtonian (fig. II.3.4)

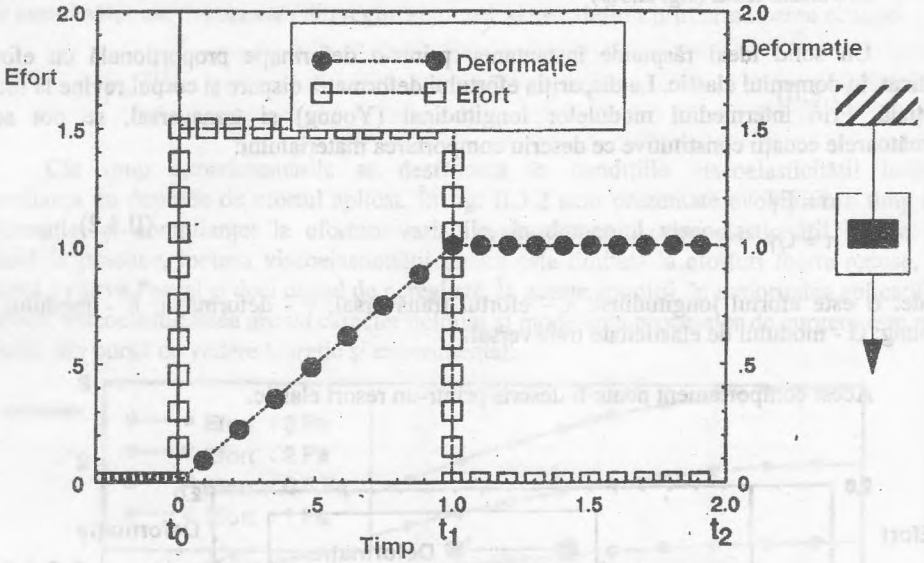


Fig. II.3.4 Răspunsul tranzitoriu pentru un fluid newtonian

Pentru lichide, viteza de deformare este proporţională cu efortul; când acesta dispare deformaţia rămâne constantă. Relaţia de legătură dintre efort şi viteza de deformare este legea lui Newton:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} = \eta \frac{d\gamma}{dt} \qquad \text{(II.3.3)}$$

unde: η este coficientul de viscozitate dinamică.

Acest comportament poate fi descris printr-un amortizor vâscos ideal.

c) Fluide viscoelastice

Prin combinaţii de resoarte elastice şi amortizoare viscoase ideale, cuplate în serie, paralel sau mixt pot fi descrise comportamentele materialelor viscolelastice şi deduse ecuaţiile constitutive corespunzătoare.

Cele mai reprezentative modele sunt Kelvin-Voigt (solidul viscoelastic) şi Maxwell (lichidul viscoelastic).

c1) Solidul viscoelastic Kelvin-Voigt

Solidul viscoelastic este modelat prin cuplarea în paralel a modelelor simple anterioare.

Deformaţia celor două elemente este aceeaşi, iar efortul total este suma eforturilor parţiale aplicate resortului şi amortizorului:

$$\tau_K = \tau_{Ke} + \tau_{Kv} \qquad \text{(II.3.4)}$$

$$\gamma_K = \gamma_{Ke} = \gamma_{Kv} \qquad \text{(II.3.5)}$$

Ecuaţia constitutivă corespunzătoare se scrie:

$$\tau_K = G_K \gamma_K + \eta_K \dot{\gamma}_K \qquad \text{(II.3.6)}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale precedente este:

$$\gamma_K(t) = \frac{\tau_0}{G_K}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_K}}\right) \qquad \text{(II.3.7)}$$

unde: $\lambda_K = \eta_K / G_K$ se numeşte timp de fluaj; τ_0 - treapta de efort aplicată la momentul iniţial.

Deformaţia remanentă se poate calcula cu relaţia ($t \to \infty$):

$$\gamma_{K0}(t) = \gamma_{K\infty} = \frac{\tau_0}{G_K} \qquad \text{(II.3.8)}$$

În fig. II.3.5 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC.

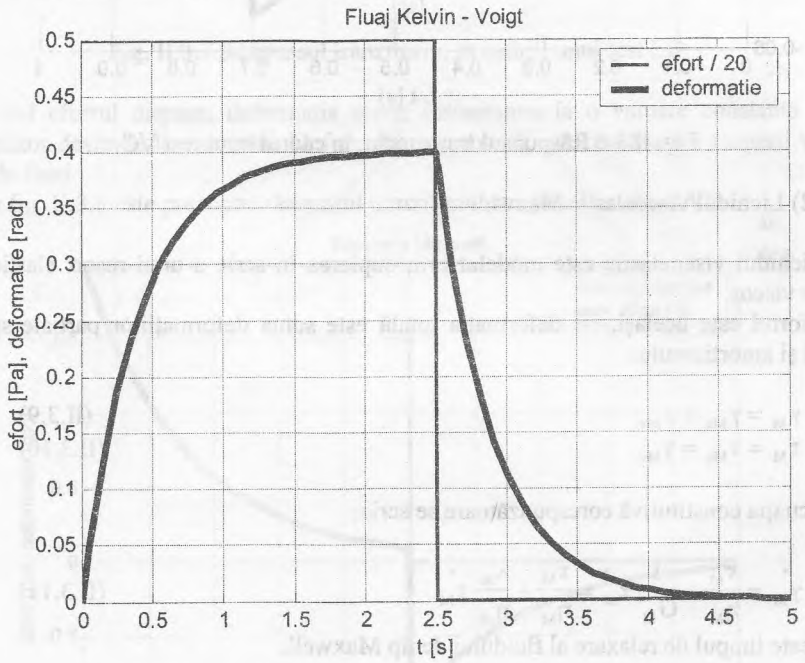


Fig. II.3.5 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

Întârzierea răspunsului, determinată de amortizor este caracterizată prin constanta de timp λ_K, măsurată aproximativ prin intersecţia dintre tangenta în origine la curba de evoluţie a deformaţiei şi dreapta $\gamma_K = \gamma_{K0}$.

La dispariţia efortului deformaţia revine la zero după o lege asemănătoare cu cea precizată în relaţia (II.3.7). Constanta de timp de relaxare este identică cu timpul de fluaj.

În fig. II.3.6 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC.

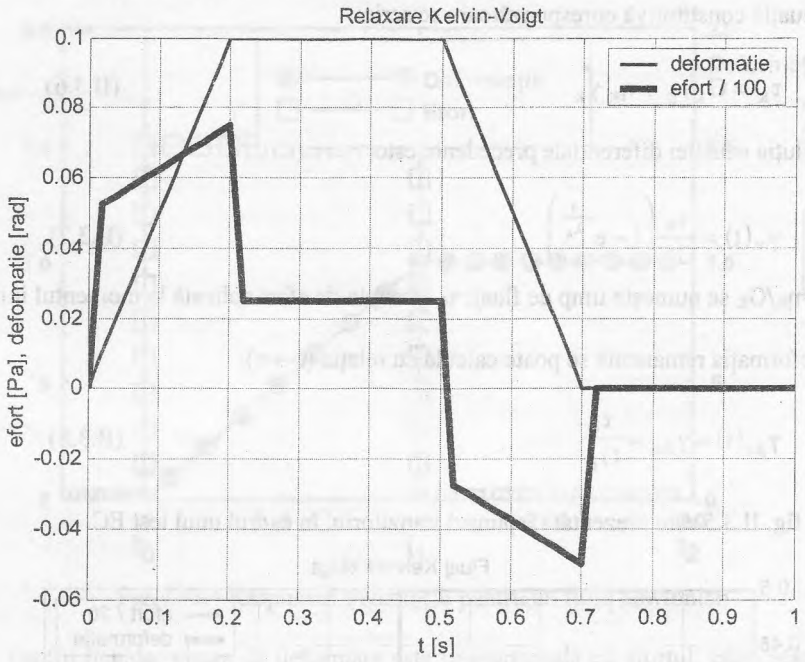


Fig. II.3.6 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

c2) Lichidul viscoelastic Maxwell

Lichidul viscoelastic este modelat prin cuplarea în serie a unui resort elastic cu un amortizor viscos.

Efortul este acelaşi, iar deformaţia totală este suma deformaţiilor parţiale specifice resortului şi amortizorului:

$$\gamma_M = \gamma_{Me} + \gamma_{Mv} \tag{II.3.9}$$

$$\tau_M = \tau_{Me} = \tau_{Mv} \tag{II.3.10}$$

Ecuaţia constitutivă corespunzătoare se scrie:

$$\dot{\gamma}_M = \frac{\tau_M}{\eta_M} + \frac{1}{G_M}\dot{\tau}_M = \frac{\tau_M}{\eta_M} + \frac{\lambda_M}{\eta_M}\dot{\tau}_M \tag{II.3.11}$$

unde λ_M este timpul de relaxare al fluidului de tip Maxwell.

Ecuaţia diferenţială precedentă are următoarea soluţie:

$$\gamma_M(t) = \frac{\tau_0}{\eta_M}t + \frac{\tau_0}{G_M} \tag{II.3.12}$$

În fig. II.3.7 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC.

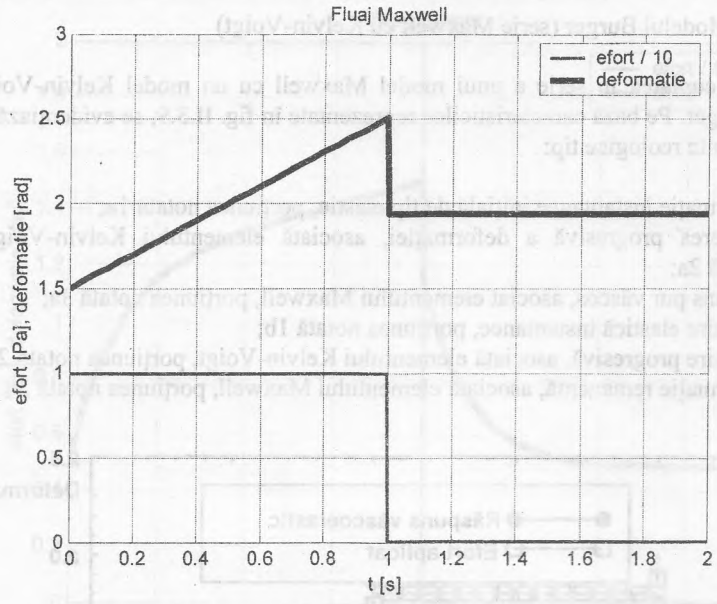


Fig. II.3.7 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

Când efortul dispare, deformația scade instantaneu la o valoare constantă nenulă, corespunzător destinderii resortului. Deformația remanentă este o măsură a curgerii viscoase din faza de fluaj.

În fig. II.3.8 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC.

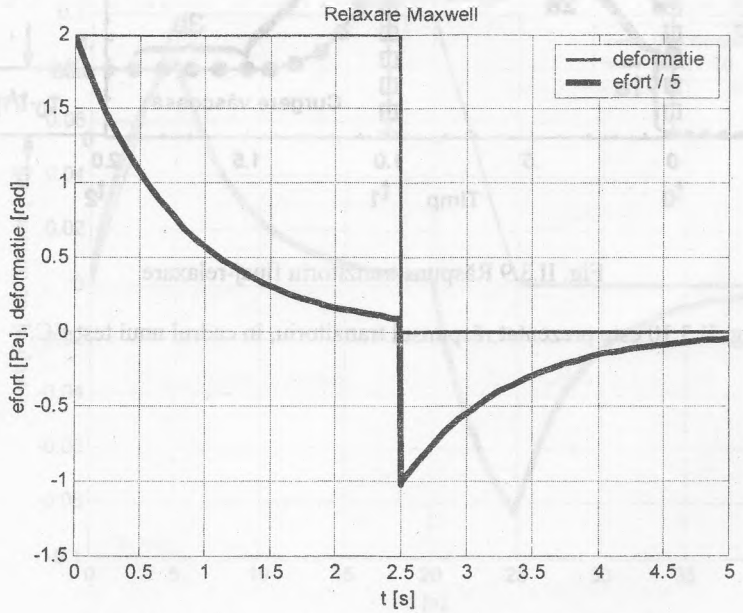


Fig. II.3.8 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

c3) Modelul Burger (serie Maxwell cu Kelvin-Voigt)

Prin cuplarea în serie a unui model Maxwell cu un model Kelvin-Voigt se obţine modelul Burger. Pe baza caracteristicilor reprezentate în fig. II.3.9, se evidenţiază următoarele comportamente reologice tip:

- deformaţie instantanee iniţială de tip elastic, porţiunea notată 1a;
- creşterea progresivă a deformaţiei, asociată elementului Kelvin-Voigt, porţiunea notată 2a;
- răspuns pur vâscos, asociat elementului Maxwell, porţiunea notată 3a;
- revenire elastică instantanee, porţiunea notată 1b;
- revenire progresivă, asociată elementului Kelvin-Voigt, porţiunea notată 2b;
- deformaţie remanentă, asociată elementului Maxwell, porţiunea notată 3b.

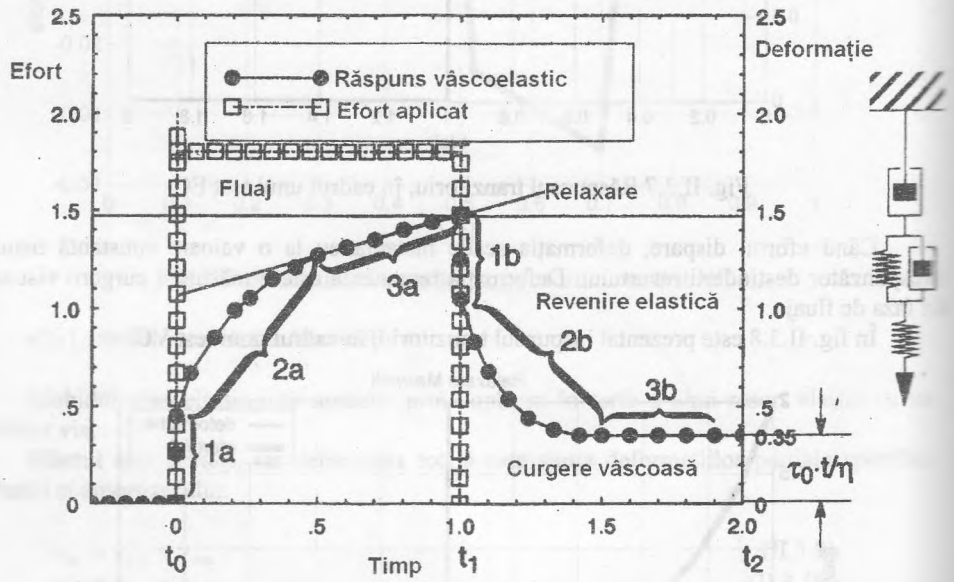


Fig. II.3.9 Răspuns tranzitoriu fluaj-relaxare

În fig. II.3.10 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC.

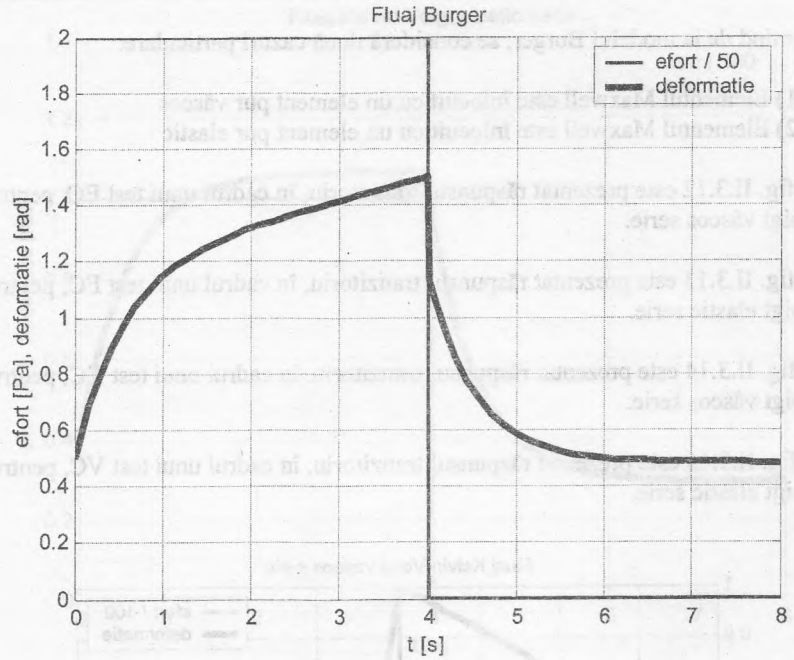


Fig. II.3.10 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

În fig. II.3.11 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC.

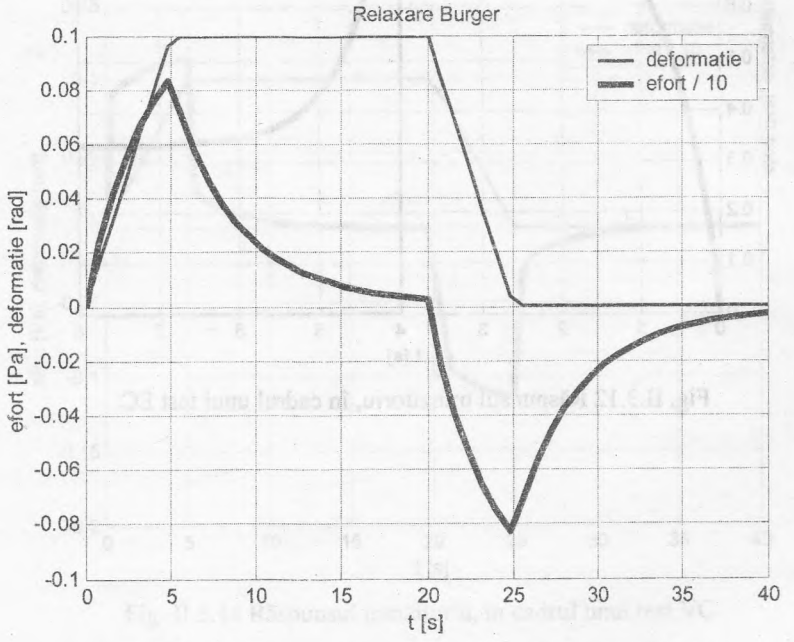


Fig. II.3.11 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

Pornind de la modelul Burger, se consideră două cazuri particulare:

c31) Elementul Maxwell este înlocuit cu un element pur vâscos
c32) Elementul Maxwell este înlocuit cu un element pur elastic

În fig. II.3.12 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC, pentru model Kelvin-Voigt vâscos serie.

În fig. II.3.13 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC, pentru model Kelvin-Voigt elastic serie.

În fig. II.3.14 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC, pentru model Kelvin-Voigt vâscos serie.

În fig. II.3.15 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC, pentru model Kelvin-Voigt elastic serie.

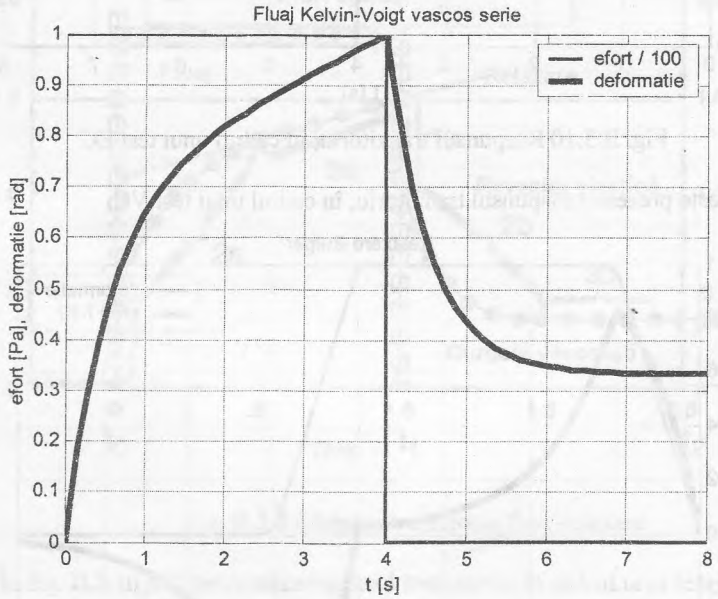


Fig. II.3.12 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

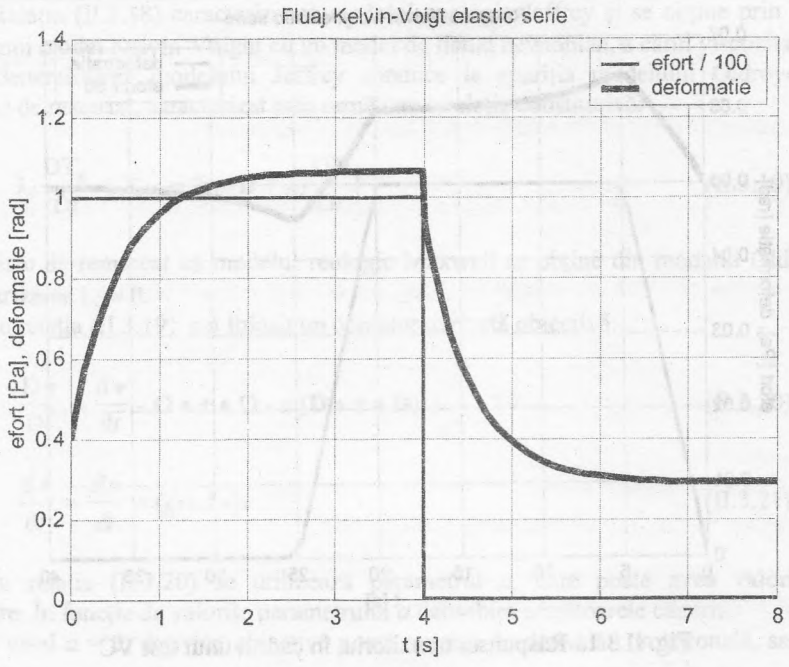


Fig. II.3.13 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

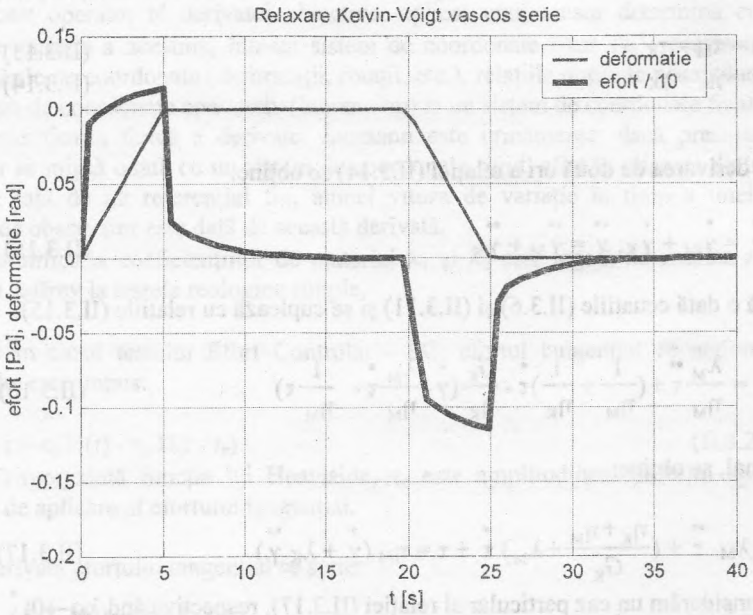


Fig. II.3.14 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

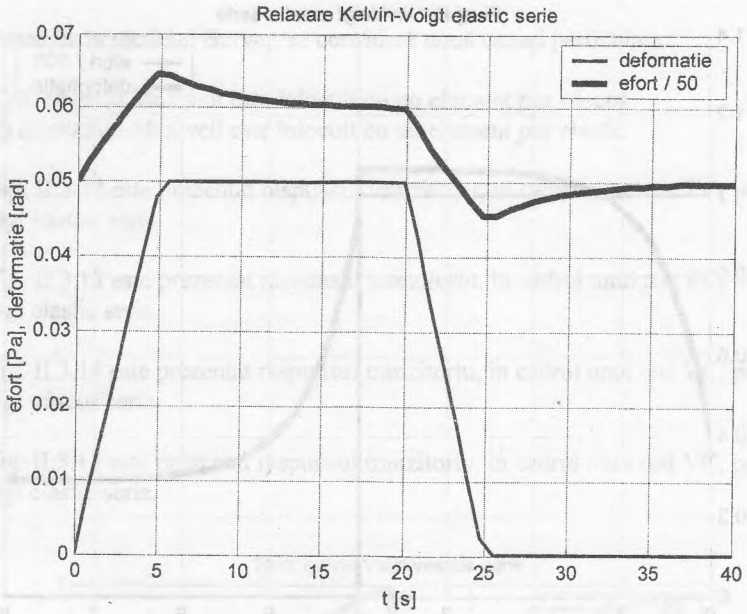


Fig. II.3.15 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

Metodologia obţinerii relaţiei constitutive a acestui model este identică cu cea aplicată în cazurile anterioare. Având în vedere legarea în serie a celor două modele, se poate scrie:

$$\tau = \tau_M = \tau_K \tag{II.3.13}$$

$$\gamma = \gamma_M + \gamma_K \tag{II.3.14}$$

Prin derivarea de două ori a relaţiei (II.3.14) se obţine:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_M + \dot{\gamma}_K;\ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}_M + \ddot{\gamma}_K \tag{II.3.15}$$

Se derivează o dată ecuaţiile (II.3.6) şi (II.3.11) şi se cuplează cu relaţiile (II.3.15):

$$\ddot{\gamma} = \frac{\lambda_M}{\eta_M}\ddot{\tau} + \left(\frac{1}{\eta_M} + \frac{1}{\eta_K}\right)\dot{\tau} - \frac{G_K}{\eta_K}\left(\dot{\gamma} - \frac{\lambda_M}{\eta_M}\dot{\tau} - \frac{1}{\eta_M}\tau\right) \tag{II.3.16}$$

În final, se obţine:

$$\lambda_K\lambda_M\ddot{\tau} + \left(\frac{\eta_K+\eta_M}{G_K} + \lambda_M\right)\dot{\tau} + \tau = \eta_M(\dot{\gamma} + \lambda_K\ddot{\gamma}) \tag{II.3.17}$$

Să considerăm un caz particular al relaţiei (II.3.17), respectiv când $\lambda_M \to 0$:

$$\lambda_1\dot{\tau} + \tau = \eta_0(\dot{\gamma} + \lambda_2\ddot{\gamma}) \tag{II.3.18}$$

Relația (II.3.18) caracterizează modelul analogic Jeffrey şi se obține prin legarea în serie a unui model Kelvin-Voight cu un model de lichid newtonian, a cărui viscozitate este η_0.

Generalizarea modelului Jeffrey conduce la apariția modelului Oldroyd, cu trei constante de material, caracterizat prin următoarea relație constitutivă:

$$\lambda_1 \frac{D\mathbf{T}_E}{Dt} + \dot{\mathbf{T}}_E = 2\eta_0[\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{D\mathbf{D}}{Dt}] \qquad \text{(II.3.19)}$$

Este de remarcat că modelul reologic Maxwell se obține din modelul Oldroyd, prin particularizarea $\lambda_2 \equiv 0$.

În relația (II.3.19) s-a folosit un operator derivată obiectivă:

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{d\bullet}{dt} - \Omega \bullet + \bullet \Omega - a(\mathbf{D} \bullet + \bullet \mathbf{D}) \qquad \text{(II.3.20)}$$

unde:

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + (grad \bullet)\mathbf{v} \qquad \text{(II.3.21)}$$

În relația (II.3.20) se utilizează parametrul a, care poate avea valori pozitive subunitare. În funcție de valorile parametrului a deosebim următoarele cazuri:

- când $a = 0$, derivata obiectivă poată numele de derivată corotațională, sau derivată Jaumann;
- când $a = 1$, se definește derivata convectivă superioară;
- când $a = -1$, se definește derivata convectivă inferioră.

Acest operator al derivatei obiective, aplicat unui tensor determină componentele vitezei de variație a acestuia, într-un sistem de coordonate fixat $\{\mathbf{e}_i\}$; acesta include toate transformările de coordonate (deformații, rotații, etc.), relațiile obținute permițând trecerea de la un sistem de coordonate convectiv (lagrangian) la un sistem de coordonate fixat (eulerian).

Semnificația fizică a derivatei Jaumann este următoarea: dacă presupunem că un observator se mişcă odată cu un sistem de coordonate rigid, aflat în mişcare de translație sau de rotație față de un referențial fix, atunci viteza de variație în timp a unei proprietăți, măsurată de observator este dată de această derivată.

Semnificația coeficienților de material λ_1 şi λ_2 este legată de analiza răspunsurilor modelului Jeffrey la testele reologice simple.

α) În cazul testului Efort Controlat - EC, efortul tangențial ce acționează asupra materialului este impus:

$$\tau = \tau_c H(t) - \tau_c H(t - t_e) \qquad \text{(II.3.22)}$$

unde $H(\tau)$ reprezintă funcția lui Heaviside, τ_c este amplitudinea efortului aplicat, t_e este intervalul de aplicare al efortului tangențial.

Derivata efortului tangențial se scrie:

$$\dot{\tau} = \tau_c \delta(t) - \tau_c \delta(t - t_e) \qquad \text{(II.3.23)}$$

unde $\delta(\tau)$ reprezintă funcția lui Dirac.

Proprietățile funcțiilor Heaviside şi Dirac sunt următoarele:

$$\int_{-\infty} H(\tau)d\tau = t; \quad \int_{-\infty} \delta(\tau)d\tau = 1; \quad \delta(t) = \dot{H}(t), \text{ pentru } t > 0. \qquad \text{(II.3.24)}$$

După prelucrările corespunzătoare, relaţia (II.3.24) devine:

$$\ddot{\gamma} + \frac{1}{\lambda_2}\dot{\gamma} = \frac{\tau_c}{\lambda_2 \eta_0}\{[H(t) - H(t - t_e)] + \lambda_1[\delta(t) - \delta(t - t_e)]\} \qquad \text{(II.3.25)}$$

Integrând de două ori relaţia (II.3.25), cu condiţii iniţiale nule se obţine soluţia pe intervalul:

$$\gamma(t) = \frac{\tau_c}{\eta_0}(\lambda_1 - \lambda_2)\left[1 - e^{-\frac{t}{\lambda_2}}\right] + \frac{t\tau_c}{\eta_0} \qquad \text{(II.3.26)}$$

valabilă pentru $0 < t \leq t_e$.

Pentru $t > t_e$ (în faza de recuperare) soluţia este:

$$\gamma(t) = \gamma_{rec}\, e^{-\frac{(t - t_e)}{\lambda_2}} + \frac{t_e \tau_c}{\eta_0} \qquad \text{(II.3.27)}$$

unde deformaţia specifică recuperată se calculează cu expresia:

$$\gamma_{rec} = \frac{\tau_c}{\eta_0}(\lambda_1 - \lambda_2)\left[1 - e^{-\frac{t_e}{\lambda_2}}\right] \qquad \text{(II.3.28)}$$

Cu ajutorul tangentei la curba de răspuns (fig. II.3.16), în punctul unghiular specific debutului fazei de recuperare $t = t_e$, $t > t_e$ se defineşte constanta de material λ_2, asociată duratei procesului de recuperare; λ_2 se numeşte timp de întârziere.

β) În testul Viteză de deformaţie Controlată - VC, viteza de deformaţie specifică este impusă:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c[H(t) - H(t - t_e)] \qquad \text{(II.3.29)}$$

unde $\dot{\gamma}_c$ este amplitudinea vitezei de deformare aplicate.

Ecuaţia constitutivă (II.3.25) capătă următoarea formă:

$$\dot{\tau} + \frac{1}{\lambda_1}\tau = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_c}{\lambda_1}\{[H(t) - H(t - t_e)] + \lambda_2[\delta(t) - \delta(t - t_e)]\} \qquad \text{(II.3.30)}$$

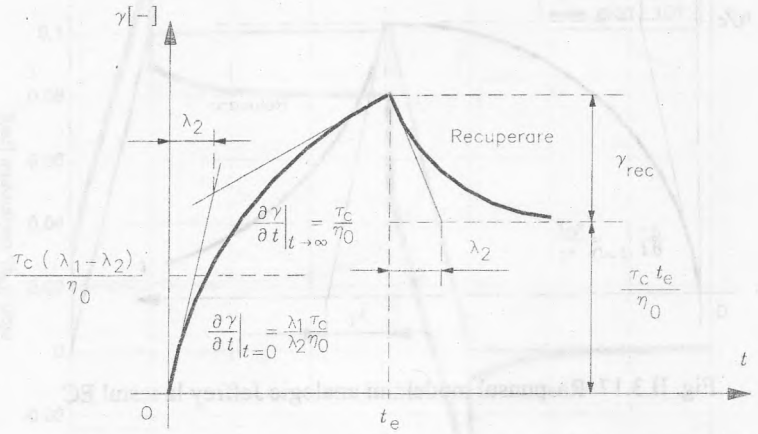


Fig. II.3.16 Răspunsul modelului analogic Jeffrey la testul de fluaj

Soluția ecuației (II.3.30) este:

$$\tau(t) = \eta_0 \dot{\gamma}_c (1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}}), \text{ pentru } t \le t_e \qquad \text{(II.3.31)}$$

$$\tau(t) = \eta_0 \dot{\gamma}_c (1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}}) e^{-\frac{t - t_e}{\lambda_1}}, \text{ pentru } t > t_e \qquad \text{(II.3.32)}$$

Reprezentarea grafică a ecuațiilor (II.3.31) și (II.3.32) este redată în fig. II.3.17.

Soluția (II.3.32) descrie comportarea în faza de relaxare a modelului Jeffrey. Procedând analog ca în cazul anterior, se definește constanta de material λ_1, numită timp de relaxare.

Modelul Jeffrey se comportă în regim staționar ($t_e \to \infty$) ca un fluid newtonian:

$$\tau_{st} = \eta_0 \dot{\gamma}_{st} \qquad \text{(II.3.33)}$$

Singura constantă care poate fi determinată în regim staționar este coeficientul de viscozitate η_0.

La limită ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), modelul Jeffrey se comportă ca un fluid pur vâscos. Prezența elasticității fluidului (modulul de elasticitate G_K) este remarcată prin cele două constante de material, valorile lor aflându-se în raportul:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \qquad \text{(II.3.34)}$$

asociat condiției ca deformația γ să fie pozitivă.

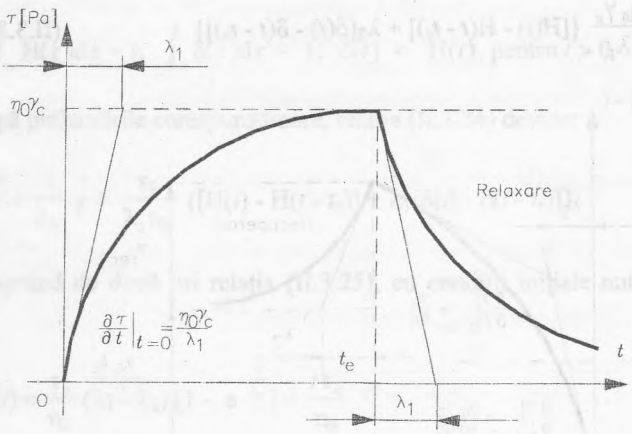


Fig. II.3.17 Răspunsul modelului analogic Jeffrey la testul EC

Modelul analogic Jeffrey descrie comportamentul reologic nestaţionar al fluidelor viscoelastice, la viteze de deformaţie şi deformaţii mici. Prin compararea rezultatelor experimentale cu celè teoretice, se pot obţine într-o primă aproximaţie valorile constantelor de material.

c4) Modelul paralel Maxwell cu Kelvin-Voigt

În fig. II.3.18 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC.

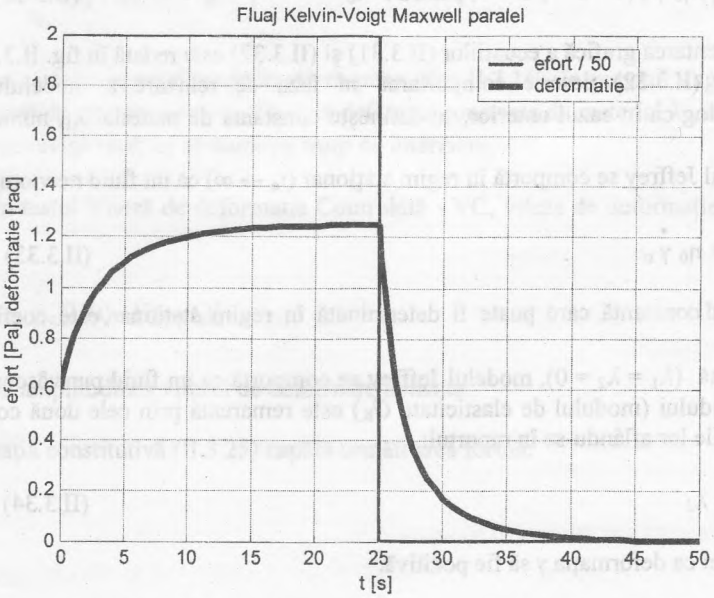


Fig. II.3.18 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

În fig. II.3.19 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC.

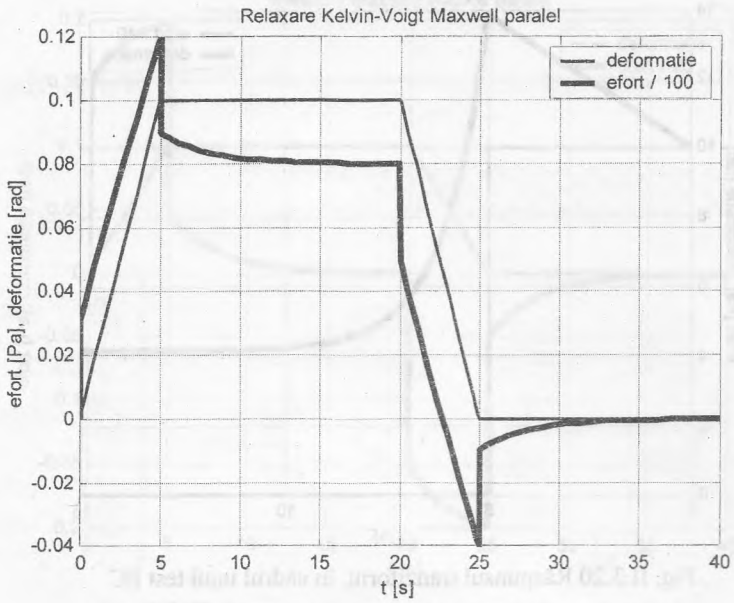


Fig. II.3.19 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

Metodologia obținerii relației constitutive a acestui model este identică cu cea aplicată în cazurile anterioare. Având în vedere legarea în paralel a celor două modele, se poate scrie:

$$\tau = \tau_M + \tau_K \qquad \text{(II.3.35')}$$

$$\gamma = \gamma_M = \gamma_K \qquad \text{(II.3.35'')}$$

Pentru obținerea relației căutate se procedează la câteva calcule simple, în final obținându-se:

$$\dot{\tau} + \frac{1}{\lambda_M}\tau = \eta_K \ddot{\gamma} + \left[G_K + \frac{1}{\lambda_M}(\eta_M + \eta_K) \right] \dot{\gamma} + \frac{G_K}{\lambda_M}\gamma \qquad \text{(II.3.36)}$$

Pornind de la modelul paralel Maxwell cu Kelvin-Voigt, se consideră două cazuri particulare:

c41) Elementul Kelvin-Voigt este înlocuit cu un element pur vâscos
c42) Elementul Kelvin-Voigt este înlocuit cu un element pur elastic

În fig. II.3.20 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC, pentru model Maxwell vâscos paralel.

În fig. II.3.21 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC, pentru model Maxwell elastic paralel.

În fig. II.3.22 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC, pentru model Maxwell vâscos paralel.

În fig. II.3.23 este prezentat răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC, pentru model Maxwell elastic paralel.

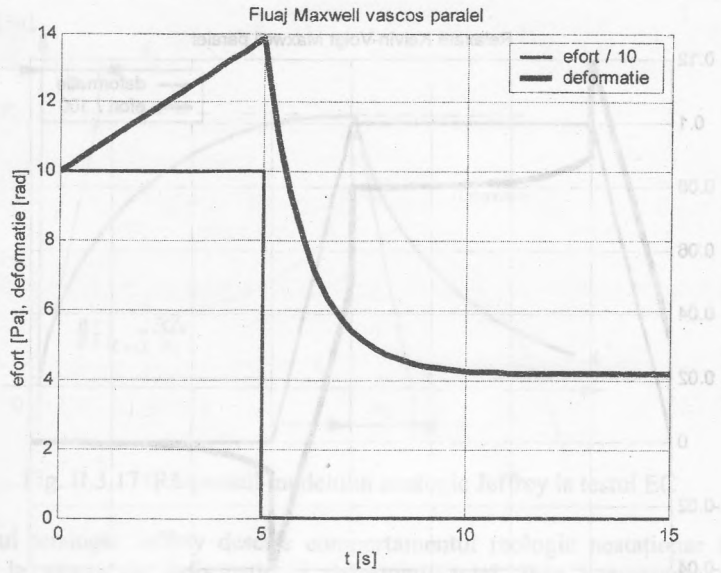


Fig. II.3.20 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

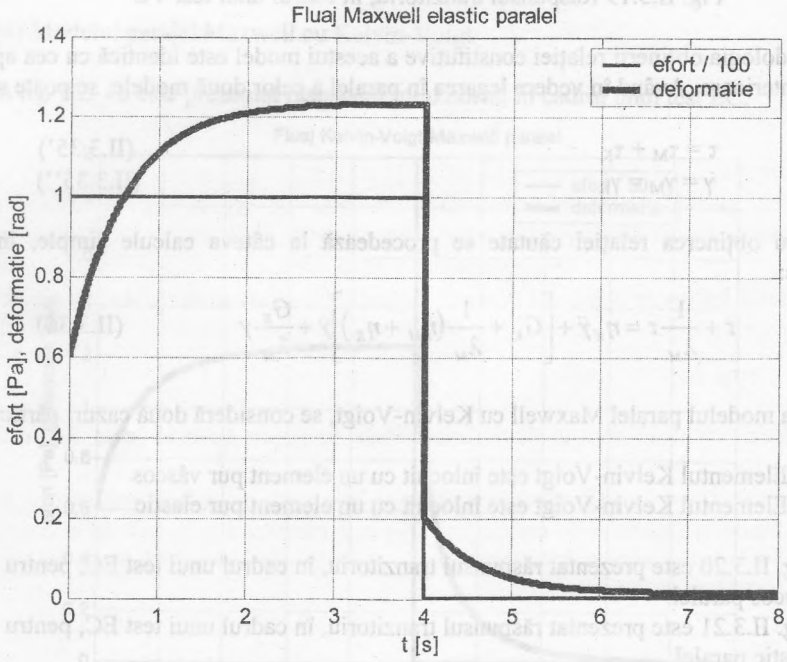


Fig. II.3.21 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test EC

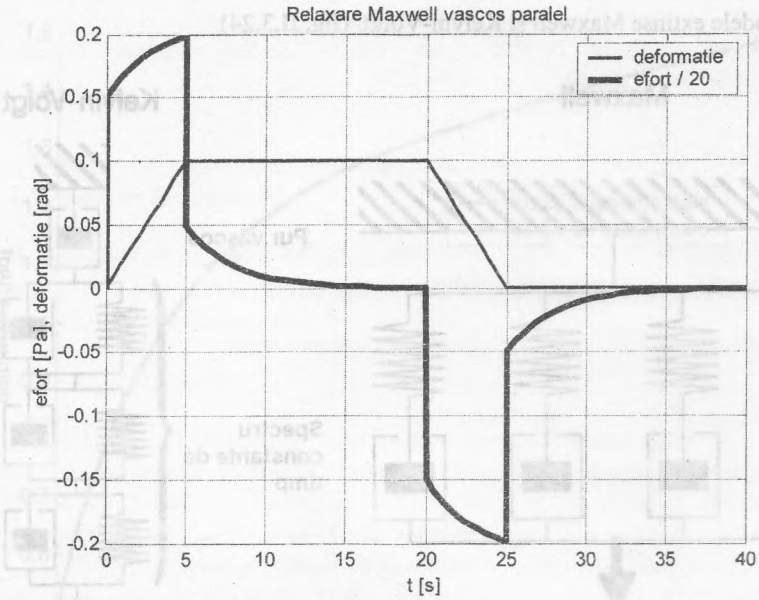


Fig. II.3.22 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

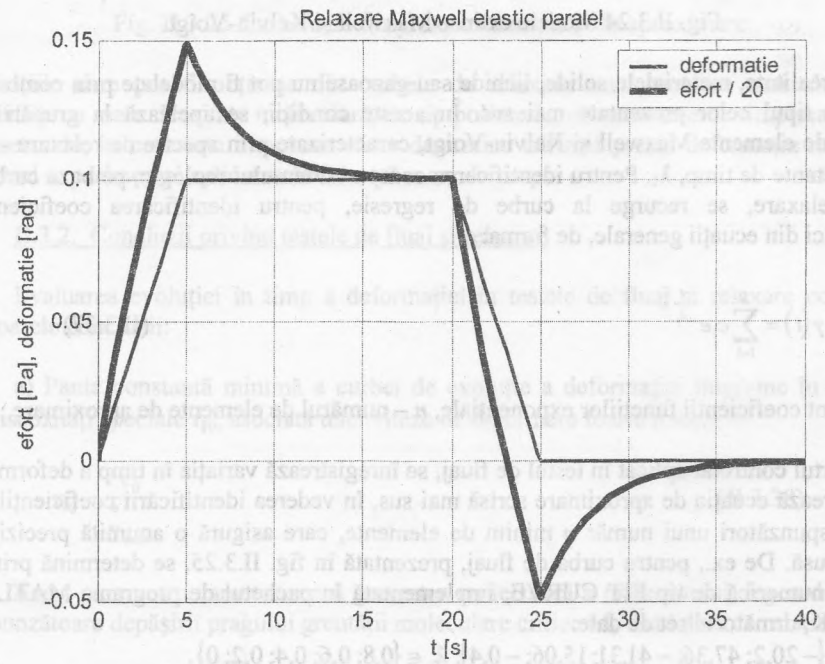


Fig. II.3.23 Răspunsul tranzitoriu, în cadrul unui test VC

c5) Modele extinse Maxwell şi Kelvin-Voigt (fig. II.3.24)

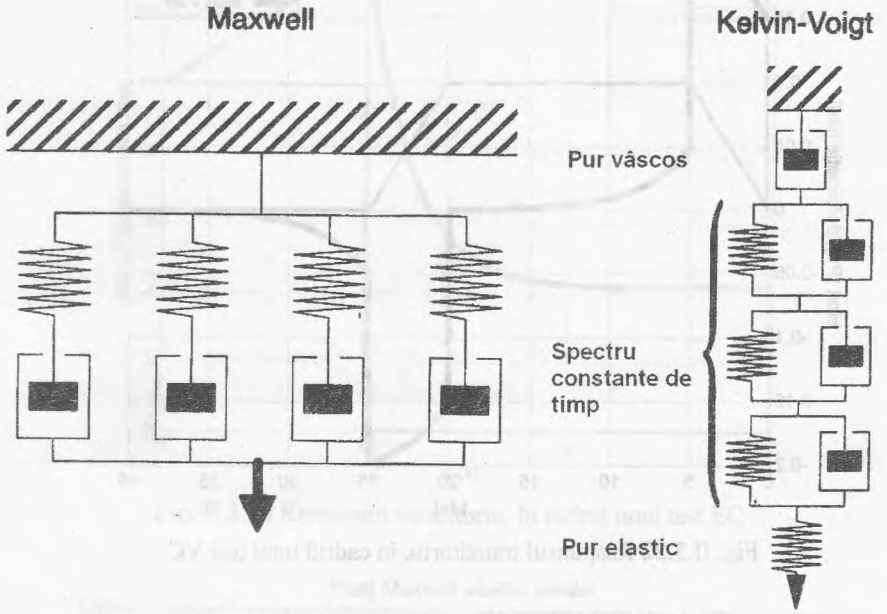


Fig. II.3.24 Modele extinse Maxwell şi Kelvin-Voigt

În realitate, materialele solide, lichide sau gazoase nu pot fi modelate prin combinaţii simple, de tipul celor prezentate mai sus. În aceste condiţii, se apelează la grupări mai complexe de elemente Maxwell şi Kelvin-Voigt, caracterizate prin spectre de relaxare - mai multe constante de timp, λ_i. Pentru identificarea comportamentului reologic, pe baza curbelor de fluaj-relaxare, se recurge la curbe de regresie, pentru identificarea coeficienţilor caracteristici din ecuaţii generale, de forma:

$$\gamma(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \qquad \text{(II.3.37)}$$

unde: c_i sunt coeficienţii funcţiilor exponenţiale, n – numărul de elemente de aproximare.

Pentru efortul controlat aplicat în testul de fluaj, se înregistrează variaţia în timp a deformaţiei şi se calibrează ecuaţia de aproximare scrisă mai sus, în vederea identificării coeficienţilor c_i şi λ_i, corespunzători unui număr n minim de elemente, care asigură o anumită precizie de calcul impusă. De ex., pentru curba de fluaj, prezentată în fig. II.3.25, se determină printr-o procedură numerică de tip FIT CURVE, implementată în pachetul de programe MATLAB-SIMULINK, următorul set de date:

$n=5;\ c_i \in \{-20{,}2;\ 47{,}36;\ -41{,}31;\ 15{,}06;\ -0{,}4\};\ \lambda_i \in \{0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0\}$.

Se observă o distribuţie liniar uniformă a coeficienţilor λ_i, presupunere care se asociază cu faptul că soluţia problemei enunţate nu este unică.

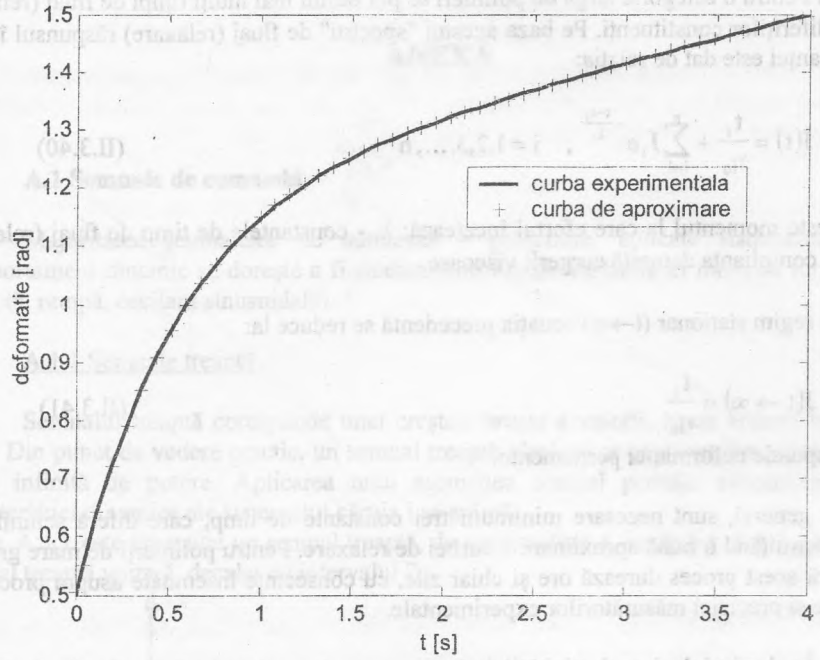


Fig. II.3.25 Curbele de fluaj, experimentală şi de aproximare

Informaţiile care pot fi obţinute din curbele de relaxare sunt necesare mai ales pentru materialele cu mare densitate moleculară, de tip polimeric, cu constante de timp mai mari de 1000 secunde, în care este important să se determine cât mai precis deformaţia remanentă, procedeul experimental aplicat având durată mare de timp.

II.3.2. Concluzii privind testele de fluaj şi relaxare

Evaluarea evoluţiei în timp a deformaţiei în testele de fluaj şi relaxare conduce la următoarele concluzii:

a) Panta constantă minimă a curbei de evoluţie a deformaţiei intervine în definirea unei viscozităţi speciale η_0, asociată unei viteze de deformare foarte mici:

$$\eta_0 = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}_{min}} \qquad \text{(II.3.38)}$$

Acest parametru caracterizează greutatea moleculară a materialului, legea de variaţie corespunzătoare depăşirii pragului greutăţii moleculare critice M_c fiind dată de relaţia:

$$\eta_0 = a\, M_w^{3,4} \qquad \text{(II.3.39)}$$

unde: M_w este greutatea moleculară, iar "a" este un coeficient de proporţionalitate.

b) Pentru o categorie largă de polimeri se pot defini mai mulţi timpi de fluaj (relaxare), datorită diferiţilor constituenţi. Pe baza acestui "spectru" de fluaj (relaxare) răspunsul în timp al complianţei este dat de relaţia:

$$J(t) = \frac{t_1}{\eta_0} + \sum_{i=1}^{n} J_i e^{-\frac{t-t_1}{\lambda_i}}, \quad i = 1,2,3,\ldots,n \qquad \text{(II.3.40)}$$

unde: t_1 este momentul la care efortul încetează; λ_i - constantele de timp de fluaj (relaxare); $J_1=t_1/\eta_0$ - complianţa datorată curgerii viscoase.

În regim staţionar ($t\to\infty$) ecuaţia precedentă se reduce la:

$$J(t \to \infty) = \frac{t_1}{\eta_0} \qquad \text{(II.3.41)}$$

care corespunde deformaţiei permanente.

În general, sunt necesare minimum trei constante de timp, care diferă semnificativ între ele permiţând o bună aproximare a curbei de relaxare. Pentru polimerii de mare greutate moleculară acest proces durează ore şi chiar zile, cu consecinţe însemnate asupra proceselor industriale şi preciziei măsurătorilor experimentale.

c) În domeniul viscoelasticităţii liniare, comportamentul elastic în fazele de fluaj şi relaxare sunt identice. Un avantaj important al acestor teste este că permit o caracterizare pe durate mari de timp a manifestărilor de tip elastic.

ANEXĂ

A.1 Semnale de comandă

Majoritatea semnalelor de comandă – prescriere, aplicate sistemelor a căror comportament dinamic se doreşte a fi studiat, sunt funcţii variabile în timp, cu formă simplă (treaptă, rampă, oscilant sinusoidală).

A.1.1 Semnale treaptă

Semnalul treaptă corespunde unei creşteri bruşte a valorii, la un anumit moment de timp. Din punct de vedere practic, un semnal treaptă ideal nu se poate realiza, căci necesită o sursă infinită de putere. Aplicarea unui asemenea semnal permite evidenţierea multor caracteristici dinamice ale sistemului căruia i se aplică.
În fig. A.1.1 este prezentat un semnal treaptă, de amplitudine A, iar în fig. A.1.2 este redat un semnal treaptă unitară, decalat cu intervalul T.

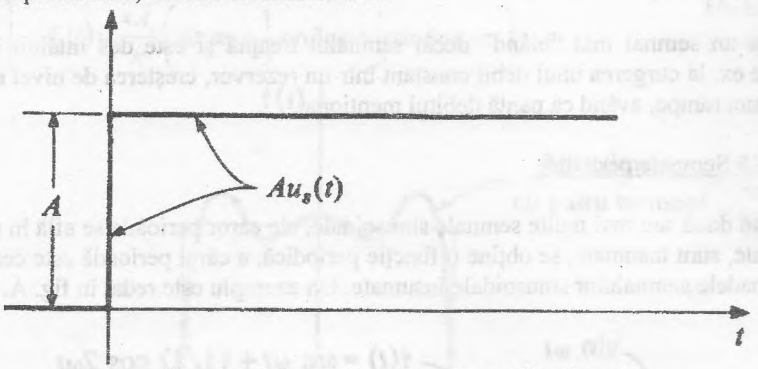


Fig. A.1.1 Semnal treaptă, de amplitudine A

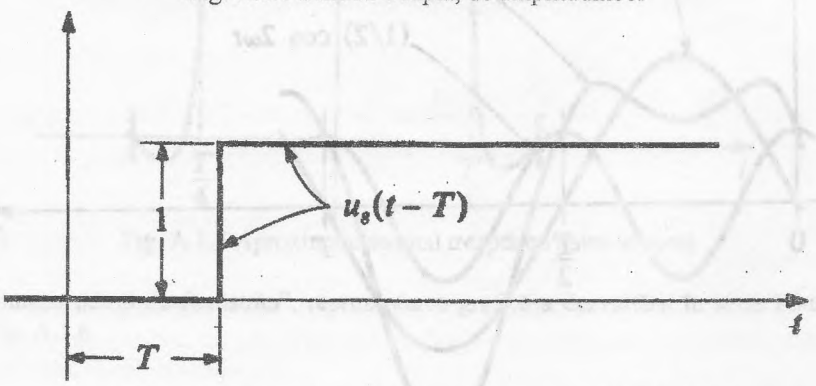


Fig. A.1.2 Semnal treaptă unitară, decalat cu intervalul T

A.1.2 Semnale rampă

Un semnal treaptă unitară, integrat în timp, se transformă într-o rampă unitară, a cărui pantă este unitară (fig. A.1.3 (a)). O rampă, de amplitudine A, are panta A și provine din integrarea unui semnal treaptă, de amplitudine A (fig. A.1.3 (b)).

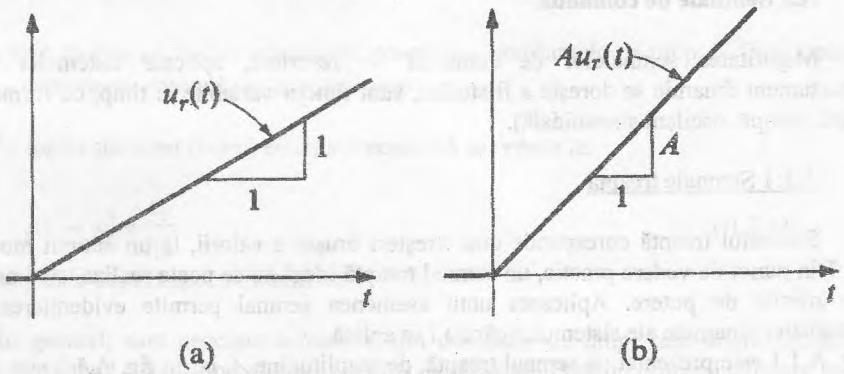


Fig. A.1.3 Semnale rampă

Este un semnal mai "blând" decât semnalul treaptă și este des întâlnit în aplicații practice, de ex. la curgerea unui debit constant într-un rezervor, creșterea de nivel este liniară, de forma unei rampe, având ca pantă debitul menționat.

A.1.3 Semnale periodice

Când două sau mai multe semnale sinusoidale, ale căror perioade se află în rapoarte de multiplicitate, sunt însumate, se obține o funcție periodică, a cărei perioadă este cea mai mare dintre perioadele semnalelor sinusoidale însumate. Un exemplu este redat în fig. A.1.4.

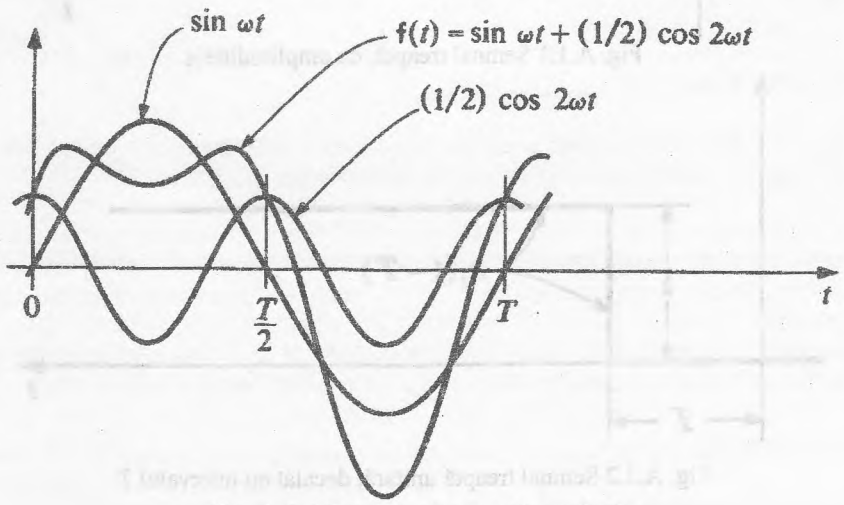


Fig. A.1.4 Exemplu de semnale periodice

În diferite cazuri practice, mai multe semnale sinusoidale, de frecvențe diferite, numite armonici, pot descrie o funcție periodică dată, cu suficientă precizie. Seriile infinite, cu termeni sinusoidali și cosinusoidali, ale căror perioade se află în rapoarte de multiplicitate, se numesc serii Fourier:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t)+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(m\omega t), \qquad \text{(A.1.1)}$$

unde: $\omega = 2\pi / T$ este pulsația funcției de perioadă T, iar coeficienții a_0, a_n și b_m se calculează cu relațiile:

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} f(t)dt \\ a_n=\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_m=\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} f(t)\sin(m\omega t)dt \end{cases} \qquad \text{(A.1.2)}$$

Aplicarea relațiilor de mai sus, pentru două semnale standard, des întâlnite în practică (fig. A.5 – semnal treaptă), ne conduce la următoarele serii Fourier:

$$\begin{cases} f_1(t)=\dfrac{8A_t}{\pi^2}\left(-\cos\omega t-\dfrac{1}{3^2}\cos 3\omega t-\dfrac{1}{5^2}\cos 5\omega t-\ldots\right) \\ f_2(t)=\dfrac{4A_s}{\pi}\left(\sin\omega t+\dfrac{1}{3}\sin 3\omega t+\dfrac{1}{5}\sin 5\omega t+\ldots\right) \end{cases} \qquad \text{(A.1.3)}$$

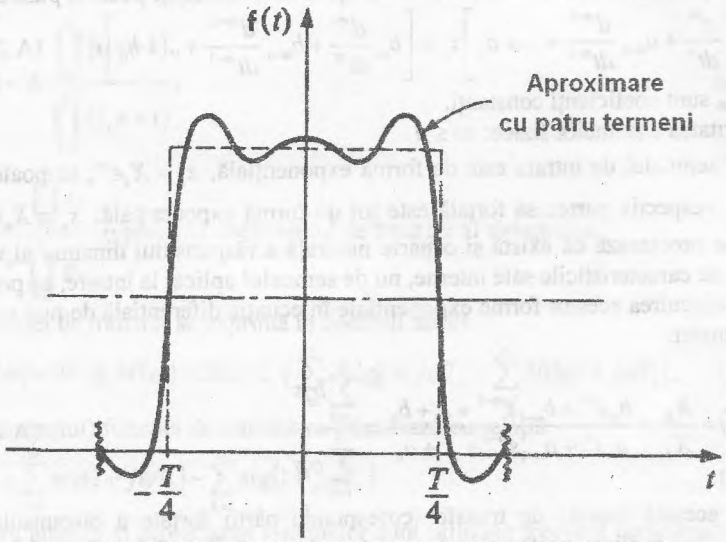


Fig. A.1.5 Aproximare semnal treaptă cu patru termeni

Pentru funcția „dinți de fierăstrău", reprezentarea grafică a dezvoltării în serie Fourier este dată în fig. A.1.6.

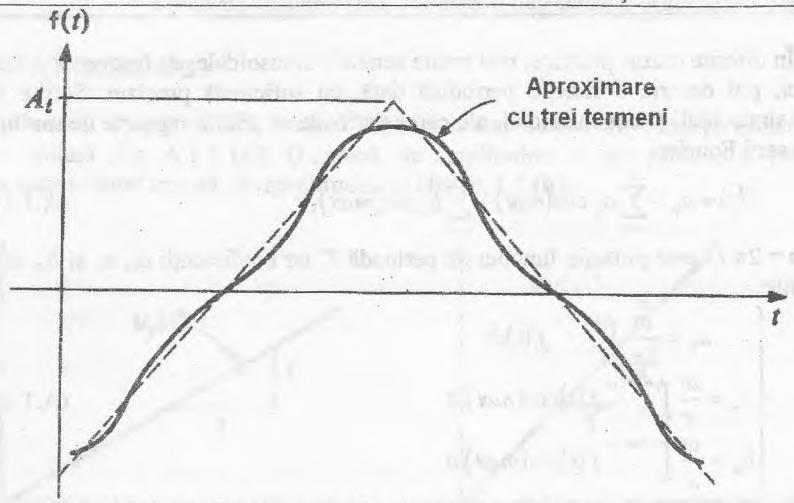


Fig. A.1.6 Aproximare semnal „dinţi de fierăstrău" cu trei termeni

A.2 Funcţii de transfer

Dinamica unui sistem poate fi caracterizată de o ecuaţie diferenţială, care relaţionează mărimea de ieşire, $x_e(t)$, cu semnalul de intrare – prescrierea, $x_i(t)$ şi poate fi pusă sub forma:

$$\left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_0\right] x_e = \left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + b_0\right] x_i \qquad \text{(A.2.1)}$$

unde: a_n şi b_m sunt coeficienţi constanţi.
Pentru majoritatea sistemelor fizice: $m \le n$.

Când semnalul de intrare este de formă exponenţială, $x_i = X_i e^{st}$, se poate demonstra că răspunsul, respectiv partea sa forţată este tot de formă exponenţială: $x_e = X_e e^{st}$. Cu titlu informativ, se precizează că există şi o parte naturală a răspunsului dinamic al unui sistem, care depinde de caracteristicile sale interne, nu de semnalul aplicat la intrare, ca prescriere.

Prin înlocuirea acestor forme exponenţiale în ecuaţia diferenţială de mai sus, se obţine funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{X_e}{X_i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \qquad \text{(A.2.2)}$$

Cu toate că această funcţie de transfer corespunde părţii forţate a răspunsului dinamic, utilizarea ei, în analiza performanţelor sistemului, oferă informaţii suficiente asupra caracteristicilor regimului tranzitoriu.

Cînd semnalul de intrare este sinusoidal: $x_i = A\sin(\omega t + \alpha)$, acesta poate fi reprezentat în mulţimea numerelor complexe: $x_i = \mathrm{Im}\left[X_i e^{j\omega t}\right]$, unde X_i este un număr complex, de forma $X_i \overset{\Delta}{=} Ae^{j\alpha}$. Se face notaţia: $s = j\omega$, care corespunde unei variabile pur imaginară.

Corespunzător, răspunsul sinusoidal al sistemului se scrie: $x_e = \mathrm{Im}\left[X_e e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[X_i H e^{j\omega t}\right]$ şi funcţia de transfer corespunzătoare se scrie:

$$H(j\omega) = \frac{X_e}{X_i} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j (j\omega)^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \qquad \text{(A.2.3)}$$

unde: $|H(j\omega)| = M(\omega)$ este modulul funcţiei de transfer, iar $\phi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$ este faza sau argumentul funcţiei de transfer.

A.3 Caracteristicile (diagramele) Bode

Funcţia de transfer se mai poate pune sub forma:

$$H(s) = \frac{X_e}{X_i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{l=1}^{m} (s + z_l)}{\prod_{k=1}^{n} (s + p_k)} \qquad \text{(A.3.1)}$$

unde: z_l şi p_k reprezintă zerourile şi polii reali ai celor două polinoame, de la numărător şi numitor.

Dacă notăm $T_l = \frac{1}{z_l}$ şi $T_k = \frac{1}{p_k}$, expresia funcţiei de transfer devine:

$$H(s) = K \frac{\prod_{l=1}^{m} (T_l s + 1)}{\prod_{k=1}^{n} (T_k s + 1)}, \qquad \text{(A.3.2)}$$

unde: $K = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{l=1}^{m} z_l}{\prod_{k=1}^{n} p_k}$ reprezintă coeficientul de transfer al sistemului.

Modulul funcţiei de transfer se exprimă în decibeli astfel:

$$M_{dB}(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg K + \sum_{l=1}^{m} 20 \lg |1 + j\omega T_l| - \sum_{k=1}^{n} 20 \lg |1 + j\omega T_k|, \qquad \text{(A.3.3)}$$

iar faza (argumentul) funcţiei de transfer se calculează cu relaţia:

$$\phi(\omega) = \sum_{l=1}^{m} \arg(1 + j\omega T_l) - \sum_{k=1}^{n} \arg(1 + j\omega T_k) \qquad \text{(A.3.4)}$$

Pentru analiza şi proiectarea sistemelor sunt utilizate frecvent caracteristicile modul – pulsaţie şi fază – pulsaţie, în reprezentare logaritmică, corespunzătoare funcţiilor de transfer echivalente. Aceste caracteristici sunt cunoscute sub denumirea de diagrame Bode.

În practică, un număr mare de sisteme sunt caracterizate prin funcţii de transfer corespunzătoare unor elemente de întârziere de ordinul I şi II, pentru care diagramele Bode vor fi prezentate în cele ce urmează.

a) Element de întârziere de ordinul I

Funcţia de transfer a unui element de întârziere de ordinul I, se scrie:

$$H_1(s)=\frac{1}{Ts+1}, \qquad \text{(A.3.5)}$$

unde: folosind un exemplu numeric, $T = 14{,}5$ ms este o constantă de timp.

Răspunsul indicial, la semnal treaptă de amplitudine unitară, este prezentat în fig. A.3.1. Se observă un răspuns aperiodic, adică o creştere continuă a semnalului de ieşire, până la valoarea de regim staţionar. Alura regimului tranzitoriu corespunde unei curbe monoton crescătoare.

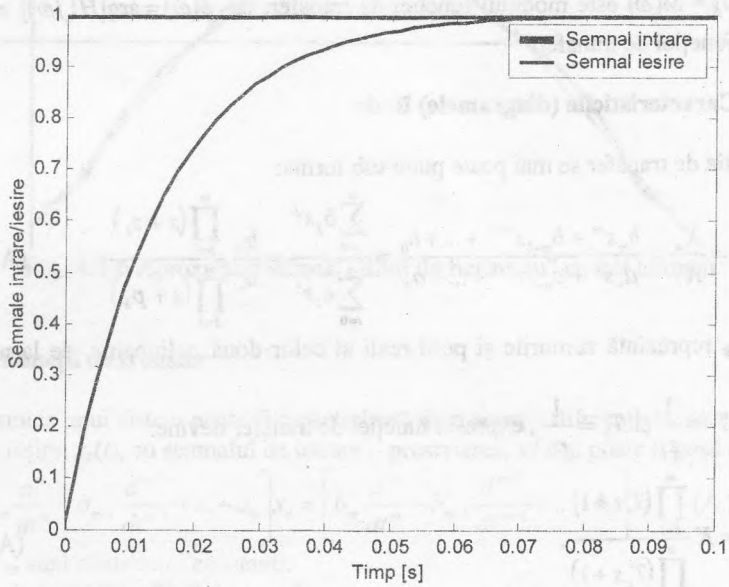


Fig. A.3.1 Răspunsul indicial pentru un element de întârziere de ordinul I

Pentru acest element, diagrama Bode este redată în fig. A.3.2.

Caracteristica $M_{dB}(\omega)$ are două asimptote, la frecvenţe joase $M_{dB} = 0$, respectiv înalte $M_{dB} = -20\lg\omega T$. Intersecţia celor două asimptote are loc la pulsaţia $\omega = \omega_f = \frac{1}{T}$, denumită pulsaţie de frângere.

Caracteristica fază – pulsaţie este:

$$\phi(\omega)=\arg\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right)=-arctg(\omega T) \qquad \text{(A.3.6)}$$

Asimptotele acestei caracteristici sunt: $\phi \cong 0$, pentru frecvenţe joase şi $\phi \cong -\frac{\pi}{2}$, pentru frecvenţe înalte. Pentru $\omega = \omega_f = \frac{1}{T}$, curba are un punct de inflexiune.

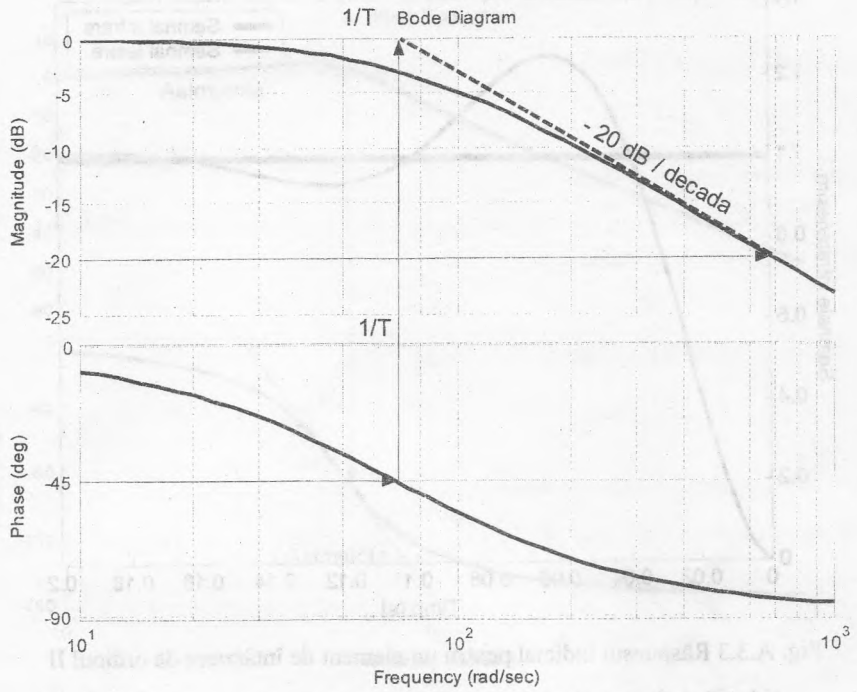


Fig. A.3.2 Diagrama Bode pentru un element de întârziere de ordinul I

a) Element de întârziere de ordinul II

Funcția de transfer a unui element de întârziere de ordinul II, se scrie:

$$H_2(s)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1} \qquad \text{(A.3.7)}$$

unde: folosind un exemplu numeric, ω_n = 55 rad/s este pulsația naturală a sistemului, iar ζ = 0,4 este factorul de amortizare.

Răspunsul indicial, la semnal treaptă de amplitudine unitară, este prezentat în fig. A.3.3. Se observă un răspuns oscilant amortizat, cu o suprareglare – depășire a valorii de regim staționar - în prima parte a regimului tranzitoriu. Curba de variație în timp a mărimii de ieşire nu este monotonă, la valori reduse ale factorului de amortizare ζ - când acesta tinde la zero regimul devine oscilant nemortizat, deci stabilitatea în funcționare este compromisă.

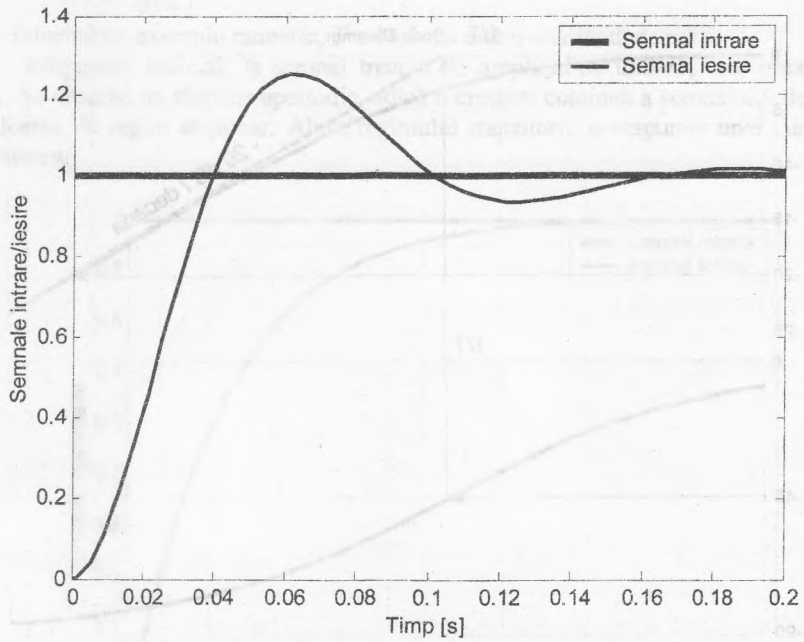


Fig. A.3.3 Răspunsul indicial pentru un element de întârziere de ordinul II

Pentru acest element, diagrama Bode este redată în fig. A.3.4.
Pentru un element de întârziere a cărui funcție de transfer conține doi poli complex conjugați ($0 < \zeta < 1$), caracteristicile Bode au deasemenea două asimptote.
Caracteristica $M_{dB}(\omega)$ are două asimptote, la frecvențe joase $M_{dB} = 0$, respectiv înalte $M_{dB} \cong -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}$. De remarcat că $M_{dB}(\omega)$ prezintă un maxim, a cărui valoare depinde de factorul de amortizare ζ.
Caracteristica fază – pulsație este:

$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = -arctg\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad \text{(A.3.8)}$$

Asimptotele acestei caracteristici sunt: $\phi \cong 0$, pentru frecvențe joase şi $\phi \cong -\pi$, pentru frecvențe înalte.

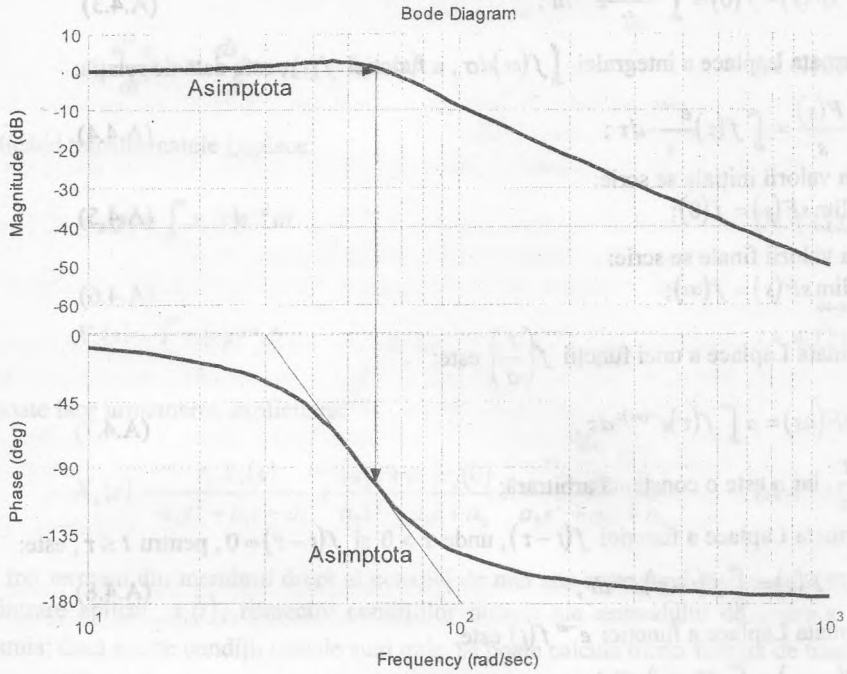


Fig. A.3.4 Diagrama Bode pentru un element de întârziere de ordinul II

A.4 Transformata Laplace

Transformata Laplace permite studiul unei probleme din domeniul real al timpului, definită printr-un sistem de ecuații diferențiale, în domeniul variabilei complexe s, prin intermediul unui sistem algebric echivalent de ecuații.

O funcție reală $f(t)$, de variabilă reală t, admite o transformată Laplace, definită astfel:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \qquad \text{(A.4.1)}$$

dacă funcția $f(t)$, denumită "original", îndeplinește următoarele condiții:

- $f(t) = 0$, pentru $t < 0$;
- $f(t)$ este derivabilă pe porțiuni;
- există două numere M_0 și σ_0, astfel încât: $|f(t)| \le M_0 e^{\sigma_0 t}$.

În expresiile de mai sus, avem următoarele notații: s este variabila complexă, de forma $s = \sigma + j\omega$, σ și ω sunt variabile reale și $j = \sqrt{-1}$.

Transformata Laplace are câteva proprietăți remarcabile:

a) Este o transformare liniară, între funcțiile definite în domeniul timp și funcțiile definite în domeniul complex:

$$a_1F_1(s) + a_2F_2(s) = \int_0^\infty [a_1f_1(t) + a_2f_2(t)]e^{-st}dt, \qquad \text{(A.4.2)}$$

unde: a_1 și a_2 sunt constante arbitrare;

b)Transformata Laplace a derivatei funcției $f(t)$ este dată de relația:

$$sF(s)-f(0)=\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt; \tag{A.4.3}$$

c) Transformata Laplace a integralei $\int_0 f(\sigma)d\sigma$, a funcției $f(t)$, este dată de relația:

$$\frac{F(s)}{s}=\int_0^{\infty}f(\tau)\frac{e^{-s\tau}}{s}d\tau; \tag{A.4.4}$$

d) Teorema valorii inițiale se scrie:

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0); \tag{A.4.5}$$

e) Teorema valorii finale se scrie:

$$\lim_{s\to 0}sF(s)=f(\infty); \tag{A.4.6}$$

f) Transformata Laplace a unei funcții $f\left(\frac{t}{a}\right)$ este:

$$aF(as)=a\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-(as)\tau}d\tau, \tag{A.4.7}$$

unde: $\tau=\frac{t}{a}$, iar a este o constantă arbitrară;

g) Transformata Laplace a funcției $f(t-\tau)$, unde $\tau>0$ şi $f(t-\tau)=0$, pentru $t\le\tau$, este:

$$e^{-st}F(s)=\int_0^{\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt; \tag{A.4.8}$$

h) Transformata Laplace a funcției $e^{-at}f(t)$ este:

$$F(s+a)=\int_0^{\infty}e^{-at}f(t)e^{-st}dt, \tag{A.4.9}$$

unde: a este o constantă arbitrară.

Un tabel sintetic cu transformatele Laplace ale unor funcții, în domeniul real, des întâlnite în practică este prezentat mai jos (tabelul A.4.1):

Tabelul A.4.1

Funcția în domeniul real $f(t)$	Transformata Laplace $F(s)$
$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
$u_r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}, n\in N^*$
$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

Facilitatea de calcul oferită de transformata Laplace este exemplificată pe o ecuație diferențială liniară, de ordinul doi, cu coeficienți constanți, de forma:

$$a_2\frac{d^2x_e}{dt^2}+a_1\frac{dx_e}{dt}+a_0x_e=b_0x_i(t). \tag{A.4.10}$$

Aplicând transformatele Laplace:

$$X_e(s)=\int_0^\infty x_e(t)e^{-st}dt \tag{A.4.11}$$

și

$$X_i(s)=\int_0^\infty x_i(t)e^{-st}dt, \tag{A.4.12}$$

se poate face următoarea explicitare:

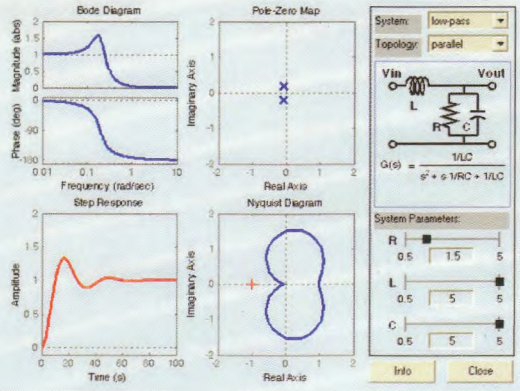
$$X_e(s)=\frac{b_0X_i(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}+\frac{(a_2s+a_1)x_e(0)}{a_2s^2+a_1s+a_0}+\frac{a_2\dfrac{dx_e}{dt}(0)}{a_2s^2+a_1s+a_0} \tag{A.4.13}$$

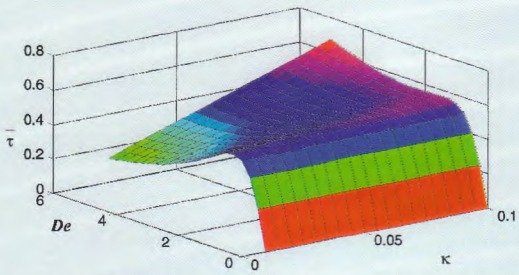
Cei trei termeni din membrul drept al ecuației de mai sus corespund răspunsului la semnalul de intrare aplicat, $x_i(t)$, respectiv condițiilor inițiale ale semnalului de ieșire și derivatei acestuia; dacă aceste condiții inițiale sunt nule, se poate calcula direct funcția de transfer:

$$H(s)=\frac{X_e(s)}{X_i(s)}=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} \tag{A.4.14}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan, Corneliu – *Introducere în mecanica mediilor continue, cu aplicații în reometrie*, Edit. Sedona, Timişoara, 1998;
2. Bălan, Corneliu – *Lecții introductive în mecanica fluidelor*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 2002;
3. Blackburn, John, F.; Reethof, Gerhard; Shearer, J., Lowen – *Fluid Power Control*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1969;
4. Catană, Ilie – *Sisteme automate electrohidraulice*, Edit. Universității Ecologice, Bucureşti, 1995;
5. Dick, Doina; Fediuc, Nicoleta; Frandoş, Silviu; Ivaşcu, Liana; Marin, Luminița; Popa, Vasilica; Robe, Mariana; Stan, Sorin; Ştefan, Cristina – *Mecatronică, manual pentru clasa a XI-a*, Delta Publishing House, Bucureşti, 2004;
6. Dick, Doina; Fediuc, Nicoleta; Frandoş, Silviu; Ivaşcu, Liana; Marin, Luminița; Popa, Vasilica; Robe, Mariana; Stan, Sorin; Ştefan, Cristina – *Mecatronică – îndrumar pentru lucrări de laborator clasa a XI-a*, Delta Publishing House, Bucureşti, 2005;
7. Florea, Julieta; Valeriu Panaitescu – *Mecanica fluidelor*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979;
8. Florea, Simion; Dumitrache, Ioan; Găburici, V.; Munteanu, Fl.; Dumitriu, S.; Catană, Ilie – *Electronică industrială şi automatizări*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983;
9. Ionescu, Dan, Gh. – *Lecții de termomecanica fluidelor vâscoase*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1997;
10. Ionescu, Dan, Gh. – *Introducere în mecanica fluidelor*, ediția a II-a, Edit. Tehnică, Bucureşti, 2005;
11. Lewis, J., W. – *Modeling Engineering Systems, PC based Techniques and Design Tools*, High Text Publications, Eagle Rock Virginia, 1994;
12. Marin, Virgil; Marin, Alexandru – *Sisteme hidraulice automate – construcție, reglare, exploatare*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1987;
13. Marin, Alexandru; Bălan, Corneliu; Nae, Bedros – *Introducere în mecanica fluidelor nenewtoniene, cu aplicații în vâscozimetrie*, Edit. AISTEDA, Bucureşti, 1998;
14. Roman, Petre; Isbăşoiu, Eugen, Constantin; Bălan, Corneliu – *Probleme speciale de hidromecanică*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1987;
15. Schramm, Gebhard – *A Practical Approach to Rheology and Rheometry*, Gebrueder HAAKE GmbH, Karlsruhe, 1994;
16. Seteanu, Ion; Rădulescu, Victorița; Vasiliu, Nicolae; Vasiliu, Daniela – Mecanica fluidelor şi sisteme hidraulice. Fundamente şi aplicații, vol. I, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1998;
17. Shearer, J., Lowen; Murphy, Arthur, T.; Richardson, Herbert, H. – *Introduction to System Dynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, Palo Alto, London, Don Mills, Ontario, 1967;
18. Vasiliu, Nicolae; Vasiliu, Daniela; Seteanu, Ion; Rădulescu, Victorița – Mecanica fluidelor şi sisteme hidraulice. Fundamente şi aplicații, vol. II, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1999.





Autorii acestei lucrări beneficiază de experienţa acumulată pe parcursul celor 20 de ani de activitate din învăţământul superior, respectiv liceal tehnic. Implicarea lor în activitatea Centrului de Cercetări Energetice şi Protecţia Mediului, din Facultatea de Energetică a Universităţii POLITEHNICA Bucureşti şi în cadrul Grupului REOROM, din Catedra de Hidraulică, Maşini Hidraulice şi Protecţia Mediului, a aceleiaşi universităţi, respectiv în proiectul de mobilităţi Leonardo da Vinci, pentru formare în implementarea mecatronicii în învăţământul preuniversitar din România, le-a oferit premizele necesare scrierii acestei cărţi.

Lucrarea îşi propune să contribuie la abordarea unitară a dinamicii sistemelor mecano-electro-fluidice şi identificării comportamentului reologic al lichidelor vâscoelastice, mai ales prin prisma aplicaţiilor rezolvate prezentate.

Cartea se adresează tuturor celor care se confruntă cu necesitatea înţelegerii funcţionării sistemelor mecano-electro-fluidice, prin intermediul modelării şi simulării dinamicii acestor sisteme, având ca public ţintă studenţii din profil mecanic, electric şi energetic ai universităţilor tehnice, dar şi specialiştii domeniului mecatronic, care vor găsi în conţinutul acestei cărţi "abecedarul" unei abordări coerente a problemelor practice.

ISBN 973-718-405-X
9 789737 184054